

Využitie cyklostacionárnych modelov pre zovšeobecnené vzorkovanie

Katarína Bachratá

FAKULTA RIADENIA A INFORMATIKY, ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

16. apríl 2010

Prehľad

1

IP telefónia

- Vzorkovanie ako rozklad do bázy
- Vlastnosti jednotkovej bázy
- Jednotková báza a Shanonov rozklad

Prehľad

- 1 IP telefónia
 - Vzorkovanie ako rozklad do bázy
 - Vlastnosti jednotkovej bázy
 - Jednotková báza a Shanonov rozklad
- 2 Shanonov a Fourierov rozklad
 - Shanonov rozklad
 - Vlastnosti ortogonálnej bázy
 - Fourierov rozklad
 - Aproximácia vo Fourierovej báze

Prehľad

- 1 IP telefónia
 - Vzorkovanie ako rozklad do bázy
 - Vlastnosti jednotkovej bázy
 - Jednotková báza a Shanonov rozklad
- 2 Shanonov a Fourierov rozklad
 - Shanonov rozklad
 - Vlastnosti ortogonálnej bázy
 - Fourierov rozklad
 - Aproximácia vo Fourierovej báze
- 3 Porovnanie
 - Porovnanie báz Shanonovho a Fourierovho rozkladu
 - Porovnanie oblasti konverencie
 - Porovnanie vlastností
 - Vlastnosti neortogonálnej bázy

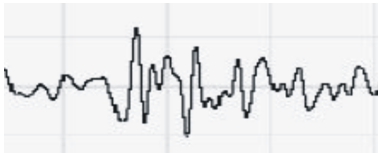
Prehľad

- 1 IP telefónia
 - Vzorkovanie ako rozklad do bázy
 - Vlastnosti jednotkovej bázy
 - Jednotková báza a Shanonov rozklad
- 2 Shanonov a Fourierov rozklad
 - Shanonov rozklad
 - Vlastnosti ortogonálnej bázy
 - Fourierov rozklad
 - Aproximácia vo Fourierovej báze
- 3 Porovnanie
 - Porovnanie báz Shanonovho a Fourierovho rozkladu
 - Porovnanie oblasti konverencie
 - Porovnanie vlastností
 - Vlastnosti neortogonálnej bázy

Prehľad

- 1 IP telefónia
 - Vzorkovanie ako rozklad do bázy
 - Vlastnosti jednotkovej bázy
 - Jednotková báza a Shanonov rozklad
- 2 Shanonov a Fourierov rozklad
 - Shanonov rozklad
 - Vlastnosti ortogonálnej bázy
 - Fourierov rozklad
 - Aproximácia vo Fourierovej báze
- 3 Porovnanie
 - Porovnanie báz Shanonovho a Fourierovho rozkladu
 - Porovnanie oblasti konvergencie
 - Porovnanie vlastností
 - Vlastnosti neortogonálnej bázy

IP telefónia, motivácia a problémy



- Vstupný rečový signál
- Spracovanie signálu pre prenos dátovými sieťami
 - Vzorkovanie
 - Kvantovanie
 - Kódovanie
- Problémy pri prenose, ovplyvňujúce kvalitu prijatého signálu
 - V telefónnych sieťach pridanie aditívneho šumu
 - V dátových sieťach nerovnomerné zaťaženie siete (jitter)
- Rekonštrukcia signálu na strane prijímača

Vzorkovanie ako rozklad do bázy

- Vzorky signálu chápané ako koeficienty nekonečného radu
- Jednotková báza
$$B_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$
- Rozklad vektora $(1, 3, 4, 2)$ do jednotkovej bázy
$$(1, 3, 4, 2) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0, 0) + 4 \cdot (0, 0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 0, 1)$$
- Prvé zovšeobecnenie: ortogonálna báza
$$B_2 = ((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1))$$
- Druhé zovšeobecnenie: neortogonálna báza
$$B_3 = ((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$$

Vlastnosti jednotkovej bázy

- Jednotková báza

$$B_1 = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

- Rozklad vektora $(1, 3, 4, 2)$ do jednotkovej bázy

$$\mathbf{f} = (1, 3, 4, 2) = c_0 \mathbf{b}_0 + c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + c_3 \mathbf{b}_3$$

- Koeficienty rozkladu sú zložky pôvodného vektora

$$c_0 = 1, c_1 = 3, c_2 = 4, c_3 = 2$$

- Výpočet koeficientov:

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_k \rangle}{\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle}$$

Napríklad

$$c_0 = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle} = \frac{\langle (1, 3, 4, 2), (1, 0, 0, 0) \rangle}{\langle (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = 1$$

Jednotková báza a Shanonov rozklad

- Vzorky signálu chápané ako koeficienty nekonečného radu
- Shanonova báza

$$B_S = \{(\mathbf{b}_k = \Phi_k(t), k \in \mathbb{Z})\}$$

$$\{\Phi_k(t) = \text{sinc}(\Omega(t - k \Delta)) \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

kde

$$\begin{aligned} \text{sinc}(t) &= \frac{\sin t}{t} & t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 1 & t = 0 \end{aligned}$$

- Rozklad vektora $\mathbf{f}$ do Shanonovej bázy je analogický rozkladu konečnorozmerného vektora do jednotkovej bázy. Koeficienty rozkladu teraz nie sú jednotlivé zložky pôvodného vektora, ale jednotlivé „vzorky“, resp. hodnoty funkcie rozkladanej f .

Shanonov rozklad

- Výpočet koeficientov v Shanonovej báze ukáže, že jednotlivé koeficienty rozkladu sú naozaj zhodné s nameranými hodnotami.
- Signály spĺňajúce vlastnosť $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, ktoré majú Fourierovu transformáciu $\hat{f}(\omega)$ takú, že

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{for} \quad |\omega| \geq \Omega > 0$$

je možné rozložiť nasledovným spôsobom:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k \Delta) \operatorname{sinc}(\Omega(t - k \Delta)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega}$$

Koeficienty Shanonovho rozkladu

- Koeficienty c_k rozkladu do bázy tvorenej funkciami $\Phi_k(t) = \text{sinc}(\Omega(t - k \Delta))$ sa vypočítajú:

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_k \rangle}{\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sinc}(\Omega(t - k \Delta)) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\Omega(t - k \Delta)) \text{sinc}(\Omega(t - k \Delta)) dx} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Vlastnosti ortogonálnej bázy

- Ortogonálna báza

$$B_2 =$$

$$((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1))$$

- Rozklad vektora $(1, 3, 4, 2)$ do ortogonálnej bázy B_2

$$\mathbf{f} = (1, 3, 4, 2) = c_0 \mathbf{b}_0 + c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + c_3 \mathbf{b}_3$$

- Koeficienty rozkladu nie sú zložky pôvodného vektora

$$c_0 = 2.5, c_1 = 0, c_2 = -0.5, c_3 = -1$$

- Výpočet koeficientov:

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_k \rangle}{\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle}$$

$$\text{Napríklad } c_0 = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle} = \frac{\langle (1, 3, 4, 2), (1, 1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle} = 2.5$$

Fourierov rozklad

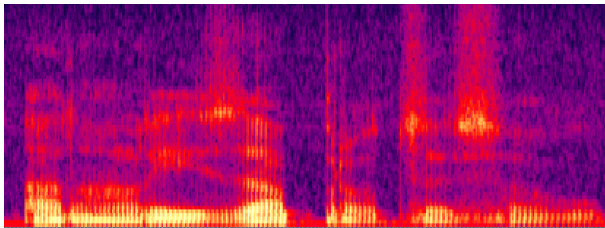
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega \quad (1)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ je Fourierova transformácia funkcie $f(t)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad (2)$$

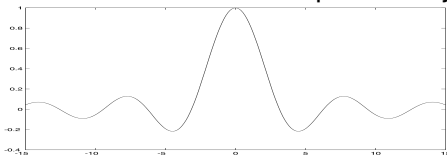
Aproximácia vo Fourierovej báze



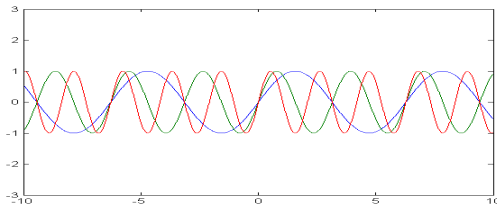
- aproximácia je presná pre signály s ohraničeným spektrom
- bázu, do ktorej sa signál rozkladá tvoria rôzne funkcie
- náročný výpočet koeficientov rozkladu
- koeficienty rozkladu zodpovedajú rozkladu zvukového signálu v ľudskom uchu
- rozklad je vhodný pre rozpoznávanie

Porovnanie bázy Shanonovho a Fourierovho rozkladu

- Shanonova báza vzniká posunom jednej funkcie



- Fourierova báza vzniká zmenou frekvencie vo funkcii sínus



Porovnanie konvergenzie Shanonovho a Fourierovho rozkladu

Pri použití prvých N členov rozkladu

- Shanonova aproximácia je presnejšia v strede intervalu konvergenzie a nepresná na koncoch
- Fourierova aproximácia je rovako presná na celom intervale konvergenzie

Porovnanie vlastností Shanonovho a Fourierovho rozkladu

- výpočet koeficientov pre Shanonov rozklad nie je potrebný
- výpočet koeficientov pre Fourierov rozklad je náročnejší
- v oboch prípadoch je báza ortogonálna a jednotlivé funkcie bázy majú rovnakú veľkosť
- v prípade vynechania koeficientu, nie sú ovplyvnené ostatné koeficienty, každý z koeficientov sa počíta iba s využitím jednej bázovej funkcie

Vlastnosti neortogonálnej bázy

- Neortogonálna báza
 $B_3 = ((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$
- Rozklad vektora $(1, 3, 4, 2)$ do neortogonálnej bázy B_3
 $\mathbf{f} = (1, 3, 4, 2) = c_0\mathbf{b}_0 + c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3$
- Na výpočet koeficientov rozkladu treba riešiť sústavu algebraických rovníc
- Výpočet koeficientov:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_k \rangle = \langle c_0\mathbf{b}_0 + c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_k \rangle$$

Neortogonálna báza pre nekonečnorozmerné vektorové priestory

- Ortogonálna báza v nekonečnorozmernom vektorovom priestore
- Podmienky pre lineárnu nezávislosť v nekonečnorozmernom priestore
- Podmienka ω -nezávislosti

Využitie neortogonálnej bázy pre rozklad reči

- Neortogonálna báza má komplikovaný výpočet koeficientov rozkladu
- Hodnota jedného koeficientu je ovplyvnená viacerými bázovými funkciami
- Vhodné využitie pre časovo citlivé dáta (VoIP), v prípade straty koeficientov

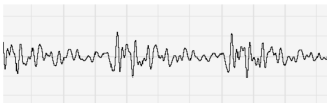
Stochastické chovanie

- Premennivé zaťaženie sieťovej prevádzky, chvenie siete (jitter)
- Náhodné straty koeficientov rozkladu
- Stratégie riešenia degradácie kvality prenesenej reči, spôsobenej stratami paketov so segmentami reči

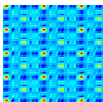
Cyklostacionárne vlastnosti reči

Pri štatistickej analýze rečového signálu pozorujeme

- Približne periodické vlastnosti strednej hodnoty



- Približne periodické vlastnosti korelácie, ako funkcie dvoch premenných



Definícia cyklostacionárnosti

- Náhodný proces $\mathbf{f}(t, \zeta)$ sa nazýva cyklostacionárny vtedy a len vtedy, keď

$$E\{\mathbf{f}(t+m\Delta, \zeta)\} = E\{\mathbf{f}(t, \zeta)\} \quad \text{a} \quad R(t_1+m\Delta, t_2+m\Delta) = R(t_1, t_2)$$

pre všetky $m \in \mathbb{Z}$.

- Štatistické vyjadrenie strednej hodnoty a korelačnej funkcie ľudskej reči

Rad posunutých funkcií násobený náhodnými koeficientami

Nech $\mathbf{x}(t, \zeta)$ je náhodný proces

$$\mathbf{x}(t, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n h(t - n\Delta) \quad (3)$$

kde $h(t)$ je daná deterministická funkcia, $H(\omega)$ je jej Fourierova transformácia a $\mathbf{c}_n$ je stacionárna postupnosť náhodných premenných so strednou hodnotou $E\{\mathbf{c}_n\} = m_c$ a s korelačnou funkciou $R_c[m] = E\{\mathbf{c}_{n+m}\mathbf{c}_n\}$.

Potom proces $\mathbf{x}(t, \zeta)$ je cyklostacionárny náhodný proces.

Vlastnosť rečového aj cyklostacionárneho signálu

Nech stacionárny náhodný proces $\mathbf{f}(t, \zeta)$ je Ω -frekvenčne ohraničený. Potom spektrálna hustota tohoto procesu je taká istá ako spektrálna hustota procesu $\bar{\mathbf{y}}(t, \zeta) = \mathbf{y}(t - \theta, \zeta)$, kde θ sa riadi rovnomerným rozdelením na intervale $\langle 0, \Delta \rangle$, θ je nezávislá s $\mathbf{y}(t, \zeta)$ a

$$\mathbf{y}(t, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(n\Delta, \zeta) \frac{\sin \Omega(t - n\Delta)}{\Omega(t - n\Delta)} \quad \text{kde} \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega}$$

ω -nezávislá báza pre prenos

Systém funkcií $\Phi_k(t) = \Phi(t - k \Delta)$, $t \in R$, $k \in Z$ je ω -nezávislý vtedy a len vtedy, ak

$$\sum_{k \in Z} c_k \Phi_k = \theta \quad \Rightarrow \quad c_k = 0 \quad \forall k \in Z$$

Ak použijeme bázu v tvare $\Phi_k(t) = \Phi(t - k \Delta)$, podmienka ω -nezávislosti bude mať tvar

$$\sum_{k \in Z} c_k \Phi_k(t) = \sum_{k \in Z} c_k \Phi(t - k \Delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = 0, \quad \forall k \in Z$$

Nutná a postačujúca podmienka pre ω -nezavislosť

Nech je dané $\Delta > 0$ a funkcia $\Phi \in L_2(-\infty, \infty)$.

Funkcia Φ generuje ω -nezavislý systém funkcií $\{\Phi_k\}$ vtedy a len vtedy, ak

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\Phi} \left(\omega + \frac{2\pi n}{\Delta} \right) \right| \neq 0 \quad \omega \in \left\langle -\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta} \right\rangle$$

kde

$$\{\Phi_k(t) = \Phi(t - k\Delta) \in L_2(-\infty, \infty), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\hat{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Modelovanie straty koeficientov náhodným procesom

Nech $\mathbf{f}(t, \zeta)$ je Ω –frekvenčne ohraničený, centrovaný proces, jeho rozklad do Shanonovej bázy je $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k(\zeta) \Phi_k(t)$.

Nech pravdepodobnosti straty koeficientov $\mathbf{c}_k(\zeta)$ sú $p_k = p$.

Nech zrekonštrovaný proces $\mathbf{f}'(t, \zeta)$ vznikne tak, že neprenesené koeficienty sa nahradia hodnotou 0.

Okamžitý výkon a korelačná funkcia šumového procesu $\mathbf{g}(t, \zeta) = \mathbf{f}(t, \zeta) - \mathbf{f}'(t, \zeta)$ sú po rade

$$\sigma_{\mathbf{g}}^2(t) = p \sigma_{\mathbf{f}}^2(t)$$

$$R_{\mathbf{g}}(t) = p^2 R_{\mathbf{f}}(t)$$

Modelovanie straty pri rozklade do zovšeobecnenej bázy

Nech $\mathbf{f}(t, \zeta)$ je náhodný proces, nech $\Phi_k(t) = \Phi(t - k\Delta)$ je postupnosť funkcií a funkcia $\Phi(t) = 0$ pre $|t| > m\Delta$, kde m je pevne dané prirodzené číslo. Nech $\mathbf{f}(t, \zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k(\zeta)\Phi_k(t)$

Koeficienty rozkladu tvoria stacionárny náhodný proces $\mathbf{c}_k(\zeta)$.
Nech pravdepodobnosti $p_k = p$.

Nech zrekonštruovaný proces $\mathbf{f}'(t, \zeta)$ vznikne tak, že sa neprenesené koeficienty nahradia hodnotou 0.

Potom pre okamžitý výkon šumu $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$ platí:

$$\sigma_{\mathbf{g}}^2(t) \leq p \sigma_{\mathbf{f}}^2(t)(1 + 2pm)$$

Záver

- Prenos hlasu cez IP siete
- Faktory znižujúce kvalitu prenosu
- Stratégie potláčajúce degradáciu kvality
- Ovpływňovanie kvality rozkladom do neštandardnej bázy