Achromatický index kompletného grafu verzus konečné projektívne roviny

Mirko Horňák

Ústav matematických vied PF UPJŠ Košice

CEX CaKS Nový Smokovec, 21.–23. 6. 2010

Európska únia
Európsky fond regionálneho rozvoja

Operačný program VÝSKUM a VÝVOJ

Agentúra Ministerstva školstva SR pre štrukturálne fondy EÚ

Podporujeme výskumné aktivity na Slovensku/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Chromatický index grafu

$G = (V, E)$ graf $\qquad$ V konečná množina, $E \subseteq \binom{V}{2}$
$V(G) = V$ vrcholová množina, $E(G) = E$ hranová množina

Chromatický index grafu

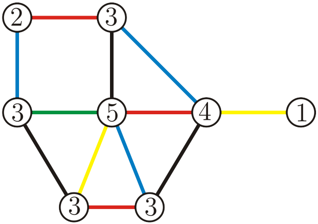
$G = (V, E)$ graf $\qquad V$ konečná množina, $E \subseteq \binom{V}{2}$
$V(G) = V$ vrcholová množina, $E(G) = E$ hranová množina

regulárne zafarbenie hrán ... stretávajúce sa (susedné) hrany majú rôzne farby

Chromatický index grafu

$G = (V, E)$ graf $\qquad V$ konečná množina, $E \subseteq \binom{V}{2}$
$V(G) = V$ vrcholová množina, $E(G) = E$ hranová množina

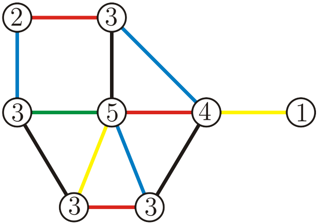
regulárne zafarbenie hrán ... stretávajúce sa (susedné) hrany majú rôzne farby



Chromatický index grafu

$G = (V, E)$ graf $\qquad V$ konečná množina, $E \subseteq \binom{V}{2}$
$V(G) = V$ vrcholová množina, $E(G) = E$ hranová množina

regulárne zafarbenie hrán ... stretávajúce sa (susedné) hrany majú rôzne farby

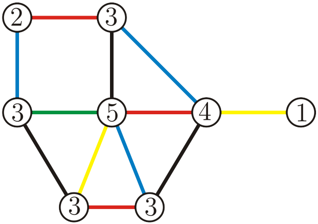


dolná hranica počtu farieb:
$\Delta(G)$ maximálny stupeň vrcholu

Chromatický index grafu

$G = (V, E)$ graf $\quad$ V konečná množina, $E \subseteq \binom{V}{2}$
$V(G) = V$ vrcholová množina, $E(G) = E$ hranová množina

regulárne zafarbenie hrán ... stretávajúce sa (susedné) hrany majú rôzne farby



dolná hranica počtu farieb:
$\Delta(G)$ maximálny stupeň vrcholu

Definícia

Chromatický index grafu G je minimálny počet $\chi'(G)$ farieb v regulárnom zafarbení hrán grafu G.

Veta (Vizing 1964)

Pre každý graf G *platí* $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Achromatický index grafu

Veta (Vizing 1964)

Pre každý graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ graf prvej triedy $\Delta(G) + 1$ graf druhej triedy
určiť $\chi'(G)$ je NP-úplný problém

Achromatický index grafu

Veta (Vizing 1964)

Pre každý graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ graf prvej triedy $\quad \Delta(G) + 1$ graf druhej triedy
určiť $\chi'(G)$ je NP-úplný problém

K_n kompletný n-vrcholový graf ... $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$
K_n prvej triedy pre párne n, druhej triedy pre nepárne n

Achromatický index grafu

Veta (Vizing 1964)

Pre každý graf G platí $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ graf prvej triedy $\Delta(G) + 1$ graf druhej triedy
určiť $\chi'(G)$ je NP-úplný problém

K_n kompletný n-vrcholový graf ... $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$
K_n prvej triedy pre párne n, druhej triedy pre nepárne n

optimálne zafarbenie (používajúce $\chi'(G)$ farieb) je úplné:
každá farba stretáva každú inú farbu
(ak sa c_1 nestretáva s c_2, farby c_1, c_2 možno zlúčiť $\to$ menej farieb)

Veta (Vizing 1964)

Pre každý graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ graf prvej triedy $\Delta(G) + 1$ graf druhej triedy
určiť $\chi'(G)$ je NP-úplný problém

K_n kompletný n-vrcholový graf ... $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$
K_n prvej triedy pre párne n, druhej triedy pre nepárne n

optimálne zafarbenie (používajúce $\chi'(G)$ farieb) je úplné:
každá farba stretáva každú inú farbu
(ak sa c_1 nestretáva s c_2, farby c_1, c_2 možno zlúčiť $\rightarrow$ menej farieb)

Definícia

Achromatický index grafu G je maximálny počet farieb v regulárnom úplnom zafarbení hrán grafu G.

Achromatický index K_n – základné fakty

$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \to$
$\to$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

Achromatický index K_n – základné fakty

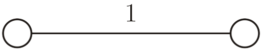
$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \rightarrow$
$\rightarrow$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

Achromatický index K_n – základné fakty

$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \rightarrow$
$\rightarrow$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

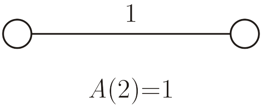
- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

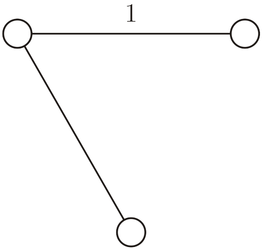


$A(2)=1$

$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \rightarrow$
$\rightarrow$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

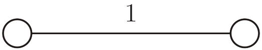




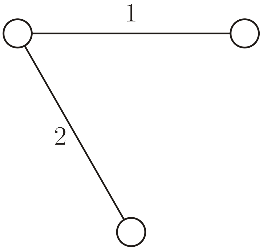
Achromatický index K_n – základné fakty

$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \rightarrow$
$\rightarrow$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

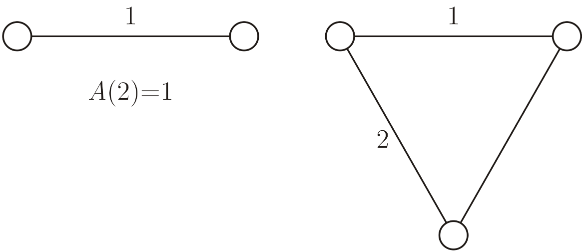


$A(2)=1$



$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \to$
$\to$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

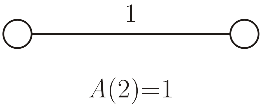
- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

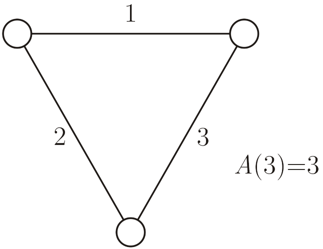


Achromatický index K_n – základné fakty

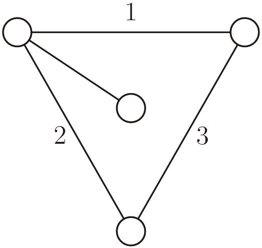
$A(n)$ ... achromatický index kompletného n-vrcholového grafu
$A(n+1) \geq A(n)$: optimálne regulárne úplné zafarbenie $K_n \rightarrow$
$\rightarrow$ regulárne úplné zafarbenie K_{n+1} tými istými $A(n)$ farbami:

- ak nová hrana nestretáva farbu c, použi pre ňu farbu c
- ak nová hrana stretáva všetky farby, použi novú farbu

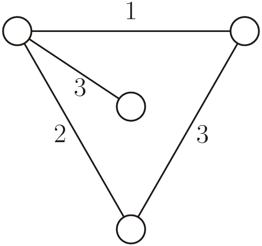




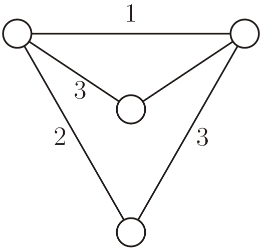
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



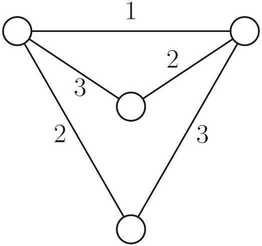
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



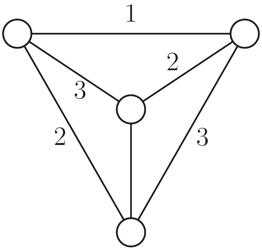
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



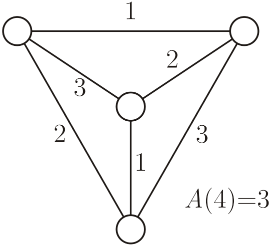
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



Achromatický index K_n – niektoré hodnoty

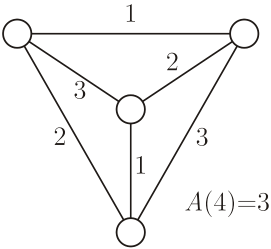


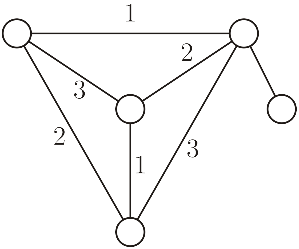
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



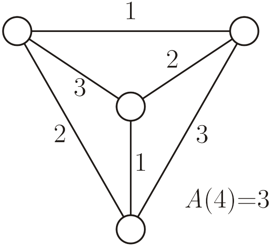
$A(4)=3$

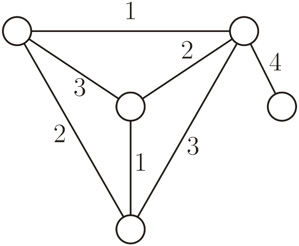
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty

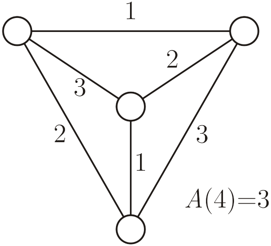




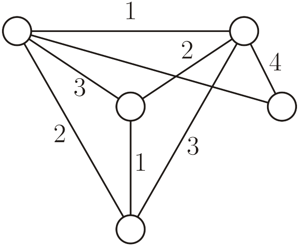
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty

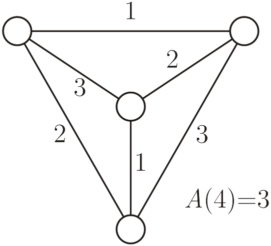




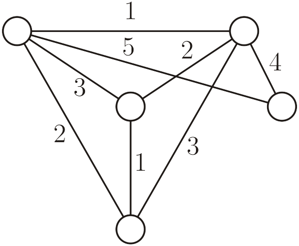


$A(4)=3$

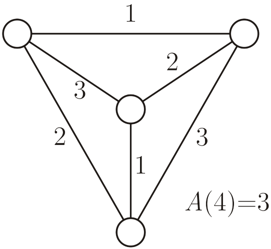


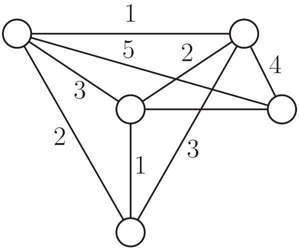


$A(4)=3$

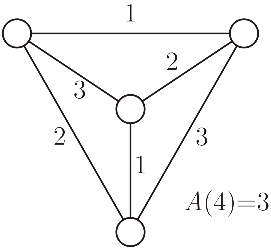


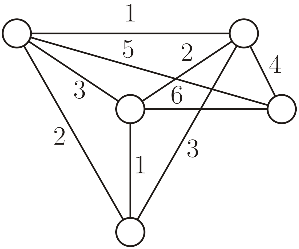
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty

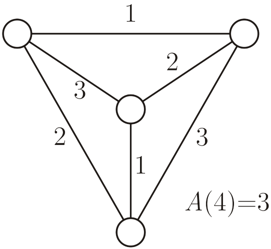


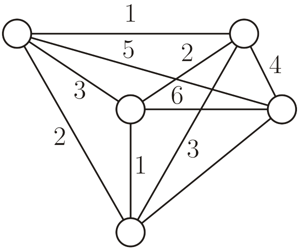


Achromatický index K_n – niektoré hodnoty

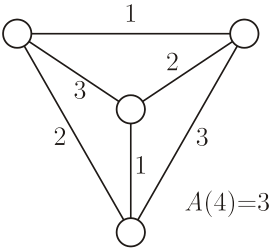


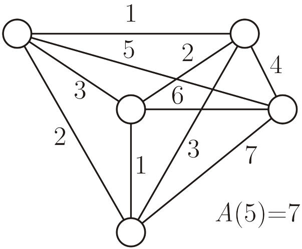



1
2
3
3
2
1
$A(4)=3$

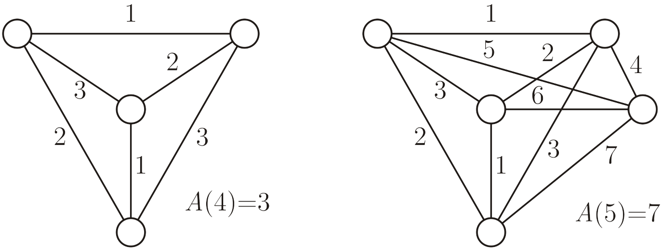

1
5
2
4
3
6
2
1
3

Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



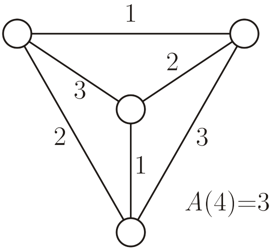


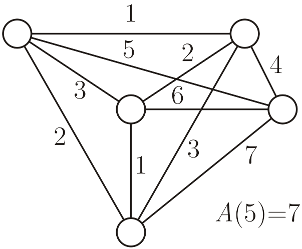
Achromatický index K_n – niektoré hodnoty



- $A(6) = 8$ Ninčák
- $A(7) = 11$ Ninčák
- $A(8) = 14$ Bouchet
- $A(9) = 18$ Bouchet
- $A(10) = 22$ Rowley

Achromatický index K_n – niektoré hodnoty





- $A(6) = 8$ Ninčák
- $A(7) = 11$ Ninčák
- $A(8) = 14$ Bouchet
- $A(9) = 18$ Bouchet
- $A(10) = 22$ Rowley
- $A(11) = 27$ Kundríková
- $A(12) = 32$ Horňák
- $A(13) = 39$ Bouchet
- $A(14) = 39$ Pčola
- $A(15) = ?$

Konečné projektívne roviny

konečná projektívna rovina $(B, \mathcal{L})$
B konečná množina (body), $\mathcal{L} \subseteq \{X : X \subseteq B\}$ (priamky)

Konečné projektívne roviny

konečná projektívna rovina $(B, \mathcal{L})$
B konečná množina (body), $\mathcal{L} \subseteq \{X : X \subseteq B\}$ (priamky)

Axiómy projektívnej roviny

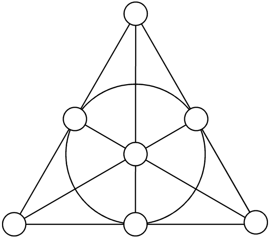
Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza jediná priamka.
Každé dve rôzne priamky majú spoločný jediný bod.
Existuje štvorica bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke.

Konečné projektívne roviny

konečná projektívna rovina $(B, \mathcal{L})$
B konečná množina (body), $\mathcal{L} \subseteq \{X : X \subseteq B\}$ (priamky)

Axiómy projektívnej roviny

Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza jediná priamka.
Každé dve rôzne priamky majú spoločný jediný bod.
Existuje štvorica bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke.



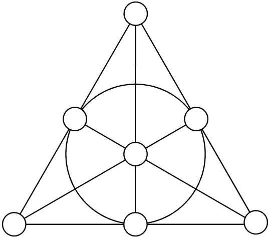
Fanova rovina

Konečné projektívne roviny

konečná projektívna rovina $(B, \mathcal{L})$
B konečná množina (body), $\mathcal{L} \subseteq \{X : X \subseteq B\}$ (priamky)

Axiómy projektívnej roviny

Každými dvoma rôznymi bodmi prechádza jediná priamka.
Každé dve rôzne priamky majú spoločný jediný bod.
Existuje štvorica bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke.



Fanova rovina

rád konečnej projektívnej roviny $q \geq 2$

$|B| = q^2 + q + 1 = |\mathcal{L}|$
každým bodom prechádza $q+1$ priamok
každá priamka má $q+1$ bodov

Poznatky o konečných projektívnych rovinách

Známy fakt: Ak p je prvočíslo a $r \in \mathbb{Z}^+$, tak existuje konečná projektívna rovina rádu p^r.

Veta (Bruck, Ryser 1949)

Ak existuje konečná projektívna rovina nepárneho rádu q, tak existuje nenulová usporiadaná trojica $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, pre ktorú platí $z^2 = qx^2 + (-1)^{(q^2+q)/2}y^2$.

Poznatky o konečných projektívnych rovinách

Známy fakt: Ak p je prvočíslo a $r \in \mathbb{Z}^+$, tak existuje konečná projektívna rovina rádu p^r.

Veta (Bruck, Ryser 1949)

Ak existuje konečná projektívna rovina nepárneho rádu q, tak existuje nenulová usporiadaná trojica $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, pre ktorú platí $z^2 = qx^2 + (-1)^{(q^2+q)/2} y^2$.

konečná projektívna rovina rádu 10 neexistuje (1989, počítač)

Poznatky o konečných projektívnych rovinách

Známy fakt: Ak p je prvočíslo a $r \in \mathbb{Z}^+$, tak existuje konečná projektívna rovina rádu p^r.

Veta (Bruck, Ryser 1949)

Ak existuje konečná projektívna rovina nepárneho rádu q, tak existuje nenulová usporiadaná trojica $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, pre ktorú platí $z^2 = qx^2 + (-1)^{(q^2+q)/2}y^2$.

konečná projektívna rovina rádu 10 neexistuje (1989, počítač)

Veta (Bouchet 1978)

Pre nepárne q sú nasledovné tvrdenia ekvivalentné:
(1) *Existuje projektívna rovina rádu q.*
(2) $A(q^2 + q + 1) = q(q^2 + q + 1)$.

podstatná implikácia Bouchetovej vety $(2) \Rightarrow (1)$
náčrt dôkazu $(1) \Rightarrow (2)$:

podstatná implikácia Bouchetovej vety $(2) \Rightarrow (1)$
náčrt dôkazu $(1) \Rightarrow (2)$:

$q+1$ párne, preto $\chi'(K_{q+1}) = \Delta(K_{q+1}) = q$
existuje regulárne zafarbenie hrán K_{q+1}, ktoré používa q farieb
(pri každom vrchole sa vyskytuje všetkých q farieb)

Bouchetova veta

podstatná implikácia Bouchetovej vety $(2) \Rightarrow (1)$
náčrt dôkazu $(1) \Rightarrow (2)$:

$q+1$ párne, preto $\chi'(K_{q+1}) = \Delta(K_{q+1}) = q$
existuje regulárne zafarbenie hrán K_{q+1}, ktoré používa q farieb
(pri každom vrchole sa vyskytuje všetkých q farieb)

$(B, \mathcal{L})$ projektívna rovina rádu q
$B = V(K_{q^2+q+1})$ $\qquad \mathcal{L} = \{L^i : i = 1, \ldots, q^2+q+1\}$
K^i_{q+1} ... kompletný podgraf grafu K_{q^2+q+1} s $V(K^i_{q+1}) := L^i$

podstatná implikácia Bouchetovej vety $(2) \Rightarrow (1)$
náčrt dôkazu $(1) \Rightarrow (2)$:

$q+1$ párne, preto $\chi'(K_{q+1}) = \Delta(K_{q+1}) = q$
existuje regulárne zafarbenie hrán K_{q+1}, ktoré používa q farieb
(pri každom vrchole sa vyskytuje všetkých q farieb)

$(B, \mathcal{L})$ projektívna rovina rádu q
$B = V(K_{q^2+q+1})$ $\qquad \mathcal{L} = \{L^i : i = 1, \dots, q^2+q+1\}$
K^i_{q+1} ... kompletný podgraf grafu K_{q^2+q+1} s $V(K^i_{q+1}) := L^i$

$\{E(K^i_{q+1}) : i = 1, \dots, q^2+q+1\}$ je rozklad $E(K_{q^2+q+1})$
$\{v, w\} \in E(K_{q^2+q+1}) \to K^i_{q+1} = L(v, w) \in \mathcal{L}$, $\{v, w\} \in E(K^i_{q+1})$
$i \neq j \Rightarrow E(K^i_{q+1}) \cap E(K^j_{q+1}) = \emptyset$ (lebo $|L^i \cap L^j| = 1$)

Bouchetova veta (pokračovanie)

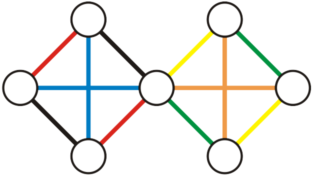
regulárne zafarbenie $\varphi^i : E(K^i_{q+1}) \to C^i$, kde $|C^i| = q$
C^i ... „privátna“ množina farieb pre K^i_{q+1}
množina $C = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} C^i$ má $q(q^2+q+1)$ farieb

Bouchetova veta (pokračovanie)

regulárne zafarbenie $\varphi^i : E(K^i_{q+1}) \to C^i$, kde $|C^i| = q$

C^i ... „privátna“ množina farieb pre K^i_{q+1}

množina $C = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} C^i$ má $q(q^2+q+1)$ farieb



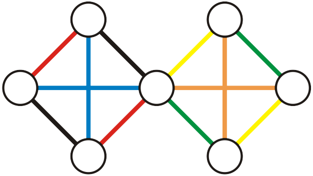
$3^2 + 3 + 1 = 13$ priamok

každá priamka zafarbená 3 farbami

celkový počet farieb $3 \cdot 13 = 39$

Bouchetova veta (pokračovanie)

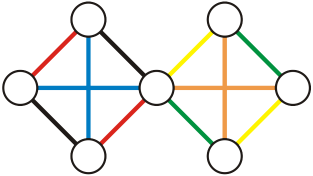
regulárne zafarbenie $\varphi^i : E(K^i_{q+1}) \to C^i$, kde $|C^i| = q$
C^i ... „privátna“ množina farieb pre K^i_{q+1}
množina $C = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} C^i$ má $q(q^2+q+1)$ farieb



$3^2 + 3 + 1 = 13$ priamok
každá priamka zafarbená 3 farbami
celkový počet farieb $3 \cdot 13 = 39$

zafarbenie $\varphi : E(K_{q^2+q+1}) \to C$ poskladané z φ^i je regulárne

regulárne zafarbenie $\varphi^i : E(K^i_{q+1}) \to C^i$, kde $|C^i| = q$
C^i ... „privátna“ množina farieb pre K^i_{q+1}
množina $C = \bigcup_{i=1}^{q^2+q+1} C^i$ má $q(q^2+q+1)$ farieb



$3^2 + 3 + 1 = 13$ priamok
každá priamka zafarbená 3 farbami
celkový počet farieb $3 \cdot 13 = 39$

zafarbenie $\varphi : E(K_{q^2+q+1}) \to C$ poskladané z φ^i je regulárne
úplnosť φ: farby z C^i sa stretnú pri každom vrchole K^i_{q+1}
farby z C^i a C^j pre $i \neq j$ sa stretnú pri bode (vrchole) $L^i \cap L^j$

Asymptotický pohľad „zhora“

Veta (Jamison 1989)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} = 1$$

Asymptotický pohľad „zhora“

Veta (Jamison 1989)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} = 1$$

optimálne úplné zafarbenie hrán K_n ... $\binom{A(n)}{2}$ farebných stretnutí
farebné stretnutie $\leftrightarrow$ dvojica susedných hrán
počet dvojíc susedných hrán ... $n\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

Asymptotický pohľad „zhora“

Veta (Jamison 1989)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} = 1$$

optimálne úplné zafarbenie hrán K_n ... $\binom{A(n)}{2}$ farebných stretnutí
farebné stretnutie $\leftrightarrow$ dvojica susedných hrán
počet dvojíc susedných hrán ... $n\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

$$\binom{A(n)}{2} = \frac{A(n)(A(n)-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

$$(A(n)-1)^2 \leq A(n)(A(n)-1) \leq n(n-1)(n-2) \leq n^3$$

Asymptotický pohľad „zhora“

Veta (Jamison 1989)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} = 1$$

optimálne úplné zafarbenie hrán K_n ... $\binom{A(n)}{2}$ farebných stretnutí
farebné stretnutie $\leftrightarrow$ dvojica susedných hrán
počet dvojíc susedných hrán ... $n\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

$$\binom{A(n)}{2} = \frac{A(n)(A(n)-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

$$(A(n)-1)^2 \leq A(n)(A(n)-1) \leq n(n-1)(n-2) \leq n^3$$

$$\frac{(A(n)-1)^2}{n^3} \leq 1 \Rightarrow \frac{A(n)-1}{\sqrt{n^3}} \leq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)-1}{\sqrt{n^3}} \leq 1$$

Asymptotický pohľad „zdola“

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje také* $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$*, že pre každé* $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ *existuje prvočíslo* p *spĺňajúce* $x < p < x(1+\varepsilon)$.

Asymptotický pohľad „zdola“

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existuje také* $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$*, že pre každé* $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ *existuje prvočíslo* p *spĺňajúce* $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:
$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$

Asymptotický pohľad „zdola"

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, že pre každé $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ existuje prvočíslo p spĺňajúce $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:
$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$
preto $x := \frac{\sqrt{n}}{1+\varepsilon} - 1 > n_\varepsilon \rightarrow$ existuje prvočíslo p: $x < p < (1+\varepsilon)x$
Bouchetova veta $\Rightarrow A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1)$

Asymptotický pohľad „zdola“

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, že pre každé $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ existuje prvočíslo p spĺňajúce $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:
$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$
preto $x := \frac{\sqrt{n}}{1+\varepsilon} - 1 > n_\varepsilon \rightarrow$ existuje prvočíslo p: $x < p < (1+\varepsilon)x$
Bouchetova veta $\Rightarrow A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1)$
$p^2+p+1 < (1+\varepsilon)^2x^2 + (1+\varepsilon)x + 1 < (1+\varepsilon)^2(x^2+2x+1) = (1+\varepsilon)^2(x+1)^2 = n$

Asymptotický pohľad „zdola“

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, že pre každé $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ existuje prvočíslo p spĺňajúce $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:

$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$

preto $x := \frac{\sqrt{n}}{1+\varepsilon} - 1 > n_\varepsilon \rightarrow$ existuje prvočíslo p: $x < p < (1+\varepsilon)x$

Bouchetova veta $\Rightarrow A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1)$

$p^2 + p + 1 < (1+\varepsilon)^2x^2 + (1+\varepsilon)x + 1 < (1+\varepsilon)^2(x^2+2x+1) = (1+\varepsilon)^2(x+1)^2 = n$

$$A(n) \geq A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1) > p^3 > x^3 = \left(\frac{\sqrt{n}-1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$$

Asymptotický pohľad „zdola“

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, že pre každé $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ existuje prvočíslo p spĺňajúce $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:

$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$

preto $x := \frac{\sqrt{n}}{1+\varepsilon} - 1 > n_\varepsilon \rightarrow$ existuje prvočíslo p: $x < p < (1+\varepsilon)x$

Bouchetova veta $\Rightarrow A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1)$

$p^2 + p + 1 < (1+\varepsilon)^2x^2 + (1+\varepsilon)x + 1 < (1+\varepsilon)^2(x^2+2x+1) = (1+\varepsilon)^2(x+1)^2 = n$

$$A(n) \geq A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1) > p^3 > x^3 = \left(\frac{\sqrt{n}-1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} \geq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt{n}-1-\varepsilon}{\sqrt{n}(1+\varepsilon)}\right]^3 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3}$$

Veta (Čebyšev)

Pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, že pre každé $x \in (n_\varepsilon, \infty)$ existuje prvočíslo p spĺňajúce $x < p < x(1+\varepsilon)$.

pre dané $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uvažujme $n \in \mathbb{Z}^+$:

$n > (n_\varepsilon + 1)^2(1+\varepsilon)^2$ ... ekvivalentne ... $\sqrt{n} > (n_\varepsilon + 1)(1+\varepsilon)$

preto $x := \frac{\sqrt{n}}{1+\varepsilon} - 1 > n_\varepsilon \rightarrow$ existuje prvočíslo p: $x < p < (1+\varepsilon)x$

Bouchetova veta $\Rightarrow A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1)$

$p^2+p+1 < (1+\varepsilon)^2x^2 + (1+\varepsilon)x + 1 < (1+\varepsilon)^2(x^2+2x+1) = (1+\varepsilon)^2(x+1)^2 = n$

$$A(n) \geq A(p^2+p+1) = p(p^2+p+1) > p^3 > x^3 = \left(\frac{\sqrt{n}-1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} \geq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt{n}-1-\varepsilon}{\sqrt{n}(1+\varepsilon)}\right]^3 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ môže byť ľubovoľne malé $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt{n^3}} \geq 1$

Grupový prístup

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)\ (x, y) \neq (v, w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x, y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)\ (x, y) \neq (v, w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x, y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

Grupový prístup

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)$ $(x, y) \neq (v, w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G$ $\exists x, y \in V(D)$ $xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

$g \in G$ ... g-posunutie grafu D ... graf gD:
$V(gD) = \{gx : x \in V(D)\}$ $E(gD) = \{\{gx, gy\} : \{x, y\} \in E(D)\}$
graf gD je izomorfný s grafom D

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x,y\},\{v,w\} \in E(D)\ (x,y) \neq (v,w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x,y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

$g \in G$ ... g-posunutie grafu D ... graf gD:
$V(gD) = \{gx : x \in V(D)\}$ $E(gD) = \{\{gx, gy\} : \{x,y\} \in E(D)\}$
graf gD je izomorfný s grafom D

$g_1 \neq g_2 \Rightarrow E(g_1 D) \cap E(g_2 D) = \emptyset$:
nech $\{g_1 x, g_1 y\} = \{g_2 v, g_2 w\}$ ... $\{x,y\},\{v,w\} \in E(D)$

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)\ (x, y) \neq (v, w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x, y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

$g \in G$ ... g-posunutie grafu D ... graf gD:
$V(gD) = \{gx : x \in V(D)\}$ $E(gD) = \{\{gx, gy\} : \{x, y\} \in E(D)\}$
graf gD je izomorfný s grafom D

$g_1 \neq g_2 \Rightarrow E(g_1D) \cap E(g_2D) = \emptyset$:
nech $\{g_1x, g_1y\} = \{g_2v, g_2w\}$ ... $\{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)$

bez ujmy na všeobecnosti $g_1x = g_2v$ a $g_1y = g_2w$
ekvivalentne: $xv^{-1} = g_1^{-1}g_2 = yw^{-1} \rightarrow x^{-1}y = v^{-1}w$

Grupový prístup

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)\ (x, y) \neq (v, w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x, y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

$g \in G$ ... g-posunutie grafu D ... graf gD:
$V(gD) = \{gx : x \in V(D)\}$ $E(gD) = \{\{gx, gy\} : \{x, y\} \in E(D)\}$
graf gD je izomorfný s grafom D

$g_1 \neq g_2 \Rightarrow E(g_1D) \cap E(g_2D) = \emptyset$:
nech $\{g_1x, g_1y\} = \{g_2v, g_2w\}$ ... $\{x, y\}, \{v, w\} \in E(D)$

bez ujmy na všeobecnosti $g_1x = g_2v$ a $g_1y = g_2w$
ekvivalentne: $xv^{-1} = g_1^{-1}g_2 = yw^{-1} \rightarrow x^{-1}y = v^{-1}w$
$(1) \Rightarrow (x, y) = (v, w)$, preto $g_1x = g_2v = g_2x \Rightarrow g_1 = g_2$

G grupa rádu n Bouchetov diagram nad G:
d-pravidelný graf D s $V(D) \subseteq G$ a $\chi'(D) = d$ s vlastnosťami
(1) $\forall \{x,y\},\{v,w\} \in E(D)\ (x,y) \neq (v,w) \Rightarrow x^{-1}y \neq v^{-1}w$
(2) $\forall g \in G\ \exists x,y \in V(D)\ xy^{-1} = g$

Veta (Bouchet)

Ak existuje d-regulárny Bouchetov diagram, tak $A(n) \geq nd$.

$g \in G$ ... g-posunutie grafu D ... graf gD:
$V(gD) = \{gx : x \in V(D)\}$ $E(gD) = \{\{gx, gy\} : \{x,y\} \in E(D)\}$
graf gD je izomorfný s grafom D

$g_1 \neq g_2 \Rightarrow E(g_1D) \cap E(g_2D) = \emptyset$:
nech $\{g_1x, g_1y\} = \{g_2v, g_2w\}$ ... $\{x,y\},\{v,w\} \in E(D)$

bez ujmy na všeobecnosti $g_1x = g_2v$ a $g_1y = g_2w$
ekvivalentne: $xv^{-1} = g_1^{-1}g_2 = yw^{-1} \rightarrow x^{-1}y = v^{-1}w$
$(1) \Rightarrow (x,y) = (v,w)$, preto $g_1x = g_2v = g_2x \Rightarrow g_1 = g_2$ ↯

Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrcholе D sa vyskytujú všetky farby z C

Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne" farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne" farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne“ farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

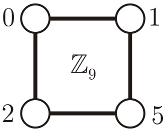
úplnosť: $(g, c_1), (g, c_2)$, $c_1 \neq c_2$, sa stretávajú (všade) vo $V(gD)$
$(g_1, c_1), (g_2, c_2)$, $g_1 \neq g_2$, sa stretávajú ... $V(g_1 D) \cap V(g_2 D) \neq \emptyset$:
$g_1 x = g_2 y \Leftrightarrow xy^{-1} = g_2^{-1} g_1$ má riešenie s $x, y \in D$ vďaka (2)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne“ farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

úplnosť: $(g, c_1), (g, c_2)$, $c_1 \neq c_2$, sa stretávajú (všade) vo $V(gD)$
$(g_1, c_1), (g_2, c_2)$, $g_1 \neq g_2$, sa stretávajú ... $V(g_1 D) \cap V(g_2 D) \neq \emptyset$:
$g_1 x = g_2 y \Leftrightarrow xy^{-1} = g_2^{-1} g_1$ má riešenie s $x, y \in D$ vďaka (2)



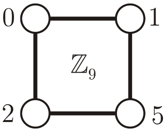
Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne“ farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

úplnosť: $(g, c_1), (g, c_2)$, $c_1 \neq c_2$, sa stretávajú (všade) vo $V(gD)$
$(g_1, c_1), (g_2, c_2)$, $g_1 \neq g_2$, sa stretávajú ... $V(g_1 D) \cap V(g_2 D) \neq \emptyset$:
$g_1 x = g_2 y \Leftrightarrow xy^{-1} = g_2^{-1} g_1$ má riešenie s $x, y \in D$ vďaka (2)



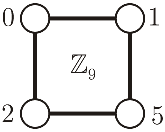
$$
\begin{array}{ll}
0^{-1}1 = 1 & 1^{-1}0 = 8 \\
0^{-1}2 = 2 & 2^{-1}0 = 7 \\
1^{-1}5 = 4 & 5^{-1}1 = 5 \\
2^{-1}5 = 3 & 5^{-1}2 = 6
\end{array}
$$

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne“ farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

úplnosť: $(g, c_1), (g, c_2)$, $c_1 \neq c_2$, sa stretávajú (všade) vo $V(gD)$
$(g_1, c_1), (g_2, c_2)$, $g_1 \neq g_2$, sa stretávajú ... $V(g_1D) \cap V(g_2D) \neq \emptyset$:
$g_1x = g_2y \Leftrightarrow xy^{-1} = g_2^{-1}g_1$ má riešenie s $x, y \in D$ vďaka (2)



$0^{-1}1 = 1$	$1^{-1}0 = 8$	$0 = 00^{-1}$	$5 = 50^{-1}$
$0^{-1}2 = 2$	$2^{-1}0 = 7$	$1 = 10^{-1}$	$6 = 25^{-1}$
$1^{-1}5 = 4$	$5^{-1}1 = 5$	$2 = 20^{-1}$	$7 = 02^{-1}$
$2^{-1}5 = 3$	$5^{-1}2 = 6$	$3 = 52^{-1}$	$8 = 01^{-1}$
		$4 = 05^{-1}$	

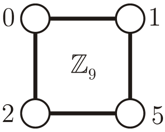
Grupový prístup (pokračovanie)

existuje regulárne zafarbenie $\varphi : E(D) \to C$ s $|C| = d$
pri každom vrchole D sa vyskytujú všetky farby z C

$\{g\} \times C$ ... „privátne“ farby pre graf gD
$\varphi^g : E(gD) \to \{g\} \times C$ ... $\varphi^g(\{gx, gy\}) = (g, \varphi(\{x, y\}))$

$\to$ zobrazenie poskladané z φ^g, $g \in G$, je regulárne ... nd farieb

úplnosť: $(g, c_1), (g, c_2)$, $c_1 \neq c_2$, sa stretávajú (všade) vo $V(gD)$
$(g_1, c_1), (g_2, c_2)$, $g_1 \neq g_2$, sa stretávajú ... $V(g_1D) \cap V(g_2D) \neq \emptyset$:
$g_1x = g_2y \Leftrightarrow xy^{-1} = g_2^{-1}g_1$ má riešenie s $x, y \in D$ vďaka (2)



$0^{-1}1 = 1$	$1^{-1}0 = 8$	$0 = 00^{-1}$	$5 = 50^{-1}$
$0^{-1}2 = 2$	$2^{-1}0 = 7$	$1 = 10^{-1}$	$6 = 25^{-1}$
$1^{-1}5 = 4$	$5^{-1}1 = 5$	$2 = 20^{-1}$	$7 = 02^{-1}$
$2^{-1}5 = 3$	$5^{-1}2 = 6$	$3 = 52^{-1}$	$8 = 01^{-1}$
		$4 = 05^{-1}$	$A(9) \geq 18$

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb
minimálna frekvencia farby f ... $cf \leq \binom{n}{2} \Rightarrow c \leq \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \leq \binom{n}{2} \Rightarrow c \leq \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

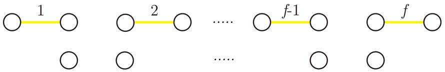
regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \le \binom{n}{2} \Rightarrow c \le \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

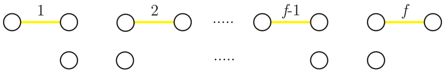
$n - 2f$ vrcholov

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \leq \binom{n}{2} \Rightarrow c \leq \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

$n - 2f$ vrcholov

úplnosť $\varphi \Rightarrow c - 1 \leq 2f(n-2f) + [\binom{2f}{2} - f] = 2f(n-f-1)$

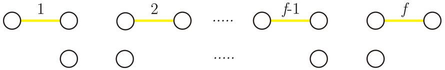
$c \leq \min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1))$

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \le \binom{n}{2} \Rightarrow c \le \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

$n - 2f$ vrcholov

úplnosť $\varphi \Rightarrow c - 1 \le 2f(n-2f) + [\binom{2f}{2} - f] = 2f(n-f-1)$

$c \le \min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1))$

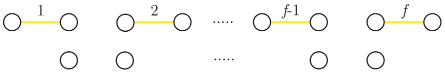
$A(n) \le \max(\min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1)) : 1 \le f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \le \binom{n}{2} \Rightarrow c \le \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

$n - 2f$ vrcholov

úplnosť $\varphi \Rightarrow c - 1 \le 2f(n-2f) + [\binom{2f}{2} - f] = 2f(n-f-1)$

$c \le \min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1))$

$A(n) \le \max(\min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1)) : 1 \le f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Veta (Jamison 1989)

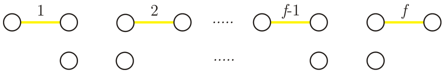
Ak $n \ge 3$, *tak* $A(n+2) \ge A(n) + 2$.

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \leq \binom{n}{2} \Rightarrow c \leq \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

$n - 2f$ vrcholov

úplnosť $\varphi \Rightarrow c - 1 \leq 2f(n-2f) + [\binom{2f}{2} - f] = 2f(n-f-1)$

$c \leq \min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1))$

$A(n) \leq \max(\min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1)) : 1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Veta (Jamison 1989)

Ak $n \geq 3$, *tak* $A(n+2) \geq A(n) + 2$.

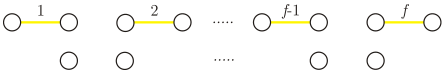
Jamison: It is also characteristic of the quirks of this problem that no proof of the *strict* inequality $A(n) < A(n+1)$ is known in general, although this is almost surely the case.

Záverečné poznámky

$\varphi : E(K_n) \to C$ úplné regulárne zafarbenie, $c = |C|$ farieb

minimálna frekvencia farby f ... $cf \le \binom{n}{2} \Rightarrow c \le \lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor$

regulárnosť $\varphi \Rightarrow f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



$2f$ vrcholov

$n - 2f$ vrcholov

úplnosť $\varphi \Rightarrow c - 1 \le 2f(n-2f) + [\binom{2f}{2} - f] = 2f(n-f-1)$

$c \le \min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1))$

$A(n) \le \max(\min(\lfloor \frac{n(n-1)}{2f} \rfloor, 1 + 2f(n-f-1)) : 1 \le f \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Veta (Jamison 1989)

Ak $n \ge 3$, tak $A(n+2) \ge A(n) + 2$.

Jamison: It is also characteristic of the quirks of this problem that no proof of the *strict* inequality $A(n) < A(n+1)$ is known in general, although this is almost surely the case. $A(13) = A(14)$ ...

Ďakujem.