
Skúsenosti s riešením praktických okružných dopravných úloh

doc. RNDr. Štefan PEŠKO, CSc.

`stefan.pesko@fri.uniza.sk`

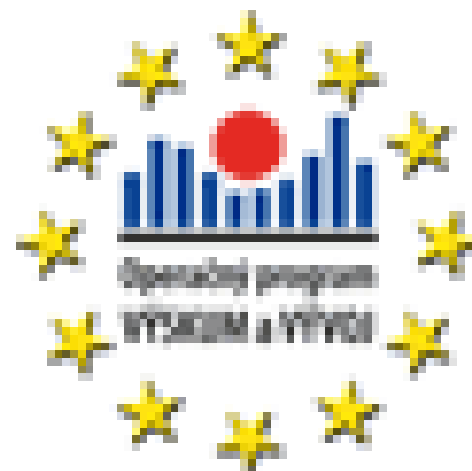
Katedra matematických metód, Fakulta riadenia a informatiky,
Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Podpora projektu CaKS

Podporujeme výskumné aktivity na Slovensku



Európska únia
Európsky fond regionálneho rozvoja



Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Okružné dopravné úlohy

- Zvoz domového odpadu v Žiline (1980-81)
- Týždenné jazdy pojazdných predajní v regióne Rimavská Sobota (1983)
- Rozvoz uhlia maloodberateľom v okresoch Stredoslovenského kraja (1984)
- Jazdy servisného vozidla dojacej techniky (1986)
- Rozvoz piva pre ČSAD Bratislava (1987)
- Rozvoz mlieka v regióne Rimavská Sobota - Šafárikovo (1987)
- Týždenný rozvoz stavebnín v okrese Košice (1989-91)
- Výlukový grafikon vlakovej dopravy na jednej kolaji (1995,2003,2010)

Okružné úlohy jedného vozidla

- Úloha obchodného cestujúceho (TSP)
- Úloha s časovými oknami (TSPW)
- Úloha nakupujúceho obchodného cestujúceho (BTSP)
- Úloha prieberčivého obchodného cestujúceho (FTSP)

Heuristiky:

- Metóda kĺzavých permutácií
- Pyramídová metóda
- Metóda čiastočných súčtov

Úloha obchodného cestujúceho - TSP

Je daná konečná množina $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a reálna matica vzdialeností $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hľadá sa taká cyklická permutácia π množiny N , ktorá minimalizuje funkciu

$$c(\pi) = \sum_{i \in N} c_{i, \pi(i)}.$$

Cyklickej permutácii $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ zodpovedá cyklus

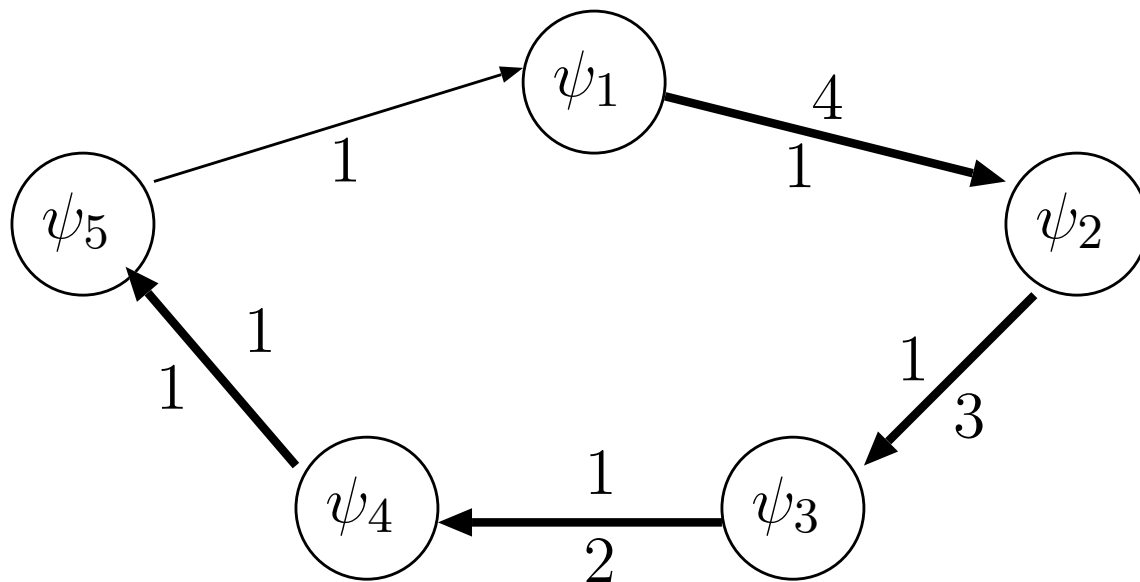
$$C_\pi := 1 \rightarrow \pi(1) \rightarrow \pi(\pi(1)) \rightarrow \dots \pi^n(1) = 1$$

v úplnom hranovo ohodnotenom digrafe K_n - Hamiltonovský cyklus.

Makhorinova (1998) reprezentácia TSP

$$C_\psi := 1 = \psi_1 \rightarrow \psi_2 \rightarrow \dots \psi_n \rightarrow 1$$

je reprezentovaný hodnotami 1 premenných x_{ij} a navzájom rôznymi číslami $1, 2, \dots, n - 1$ premenných y_{ij} takto:



Obrázok 1: Cyklus, ktorý obsahuje kostru digrafu je Hamiltonovský!

Makhorinova formulácia TSP

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i \neq j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad i \in N, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad j \in N, \quad (3)$$

$$y_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \quad i, j \in N, i \neq j \quad (4)$$

$$\sum_{k \in N: k \neq 1} y_{1k} = n-1 \quad (5)$$

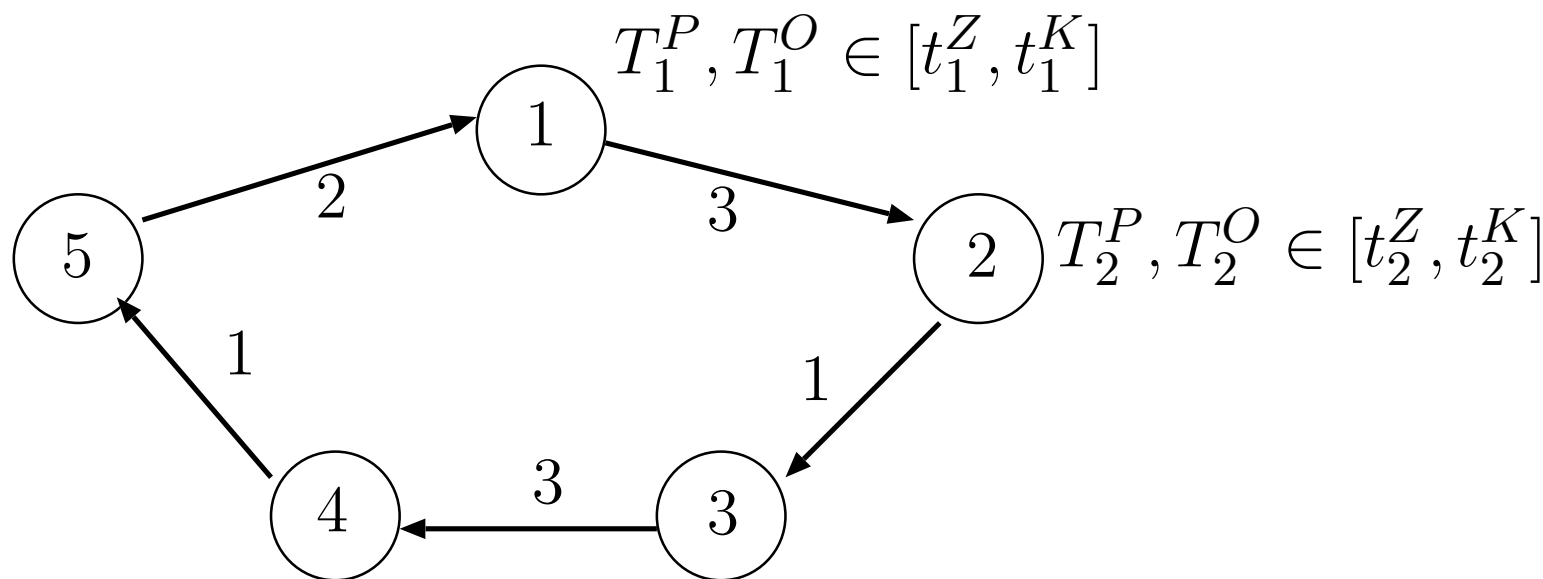
$$\sum_{k \in N: k \neq i} y_{ki} = \sum_{k \in N: k \neq i} y_{ik} + 1 \quad i \in N - \{1\} \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N, i \neq j, \quad (7)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i, j \in N, i \neq j. \quad (8)$$

Úloha s časovými oknami - TSPW

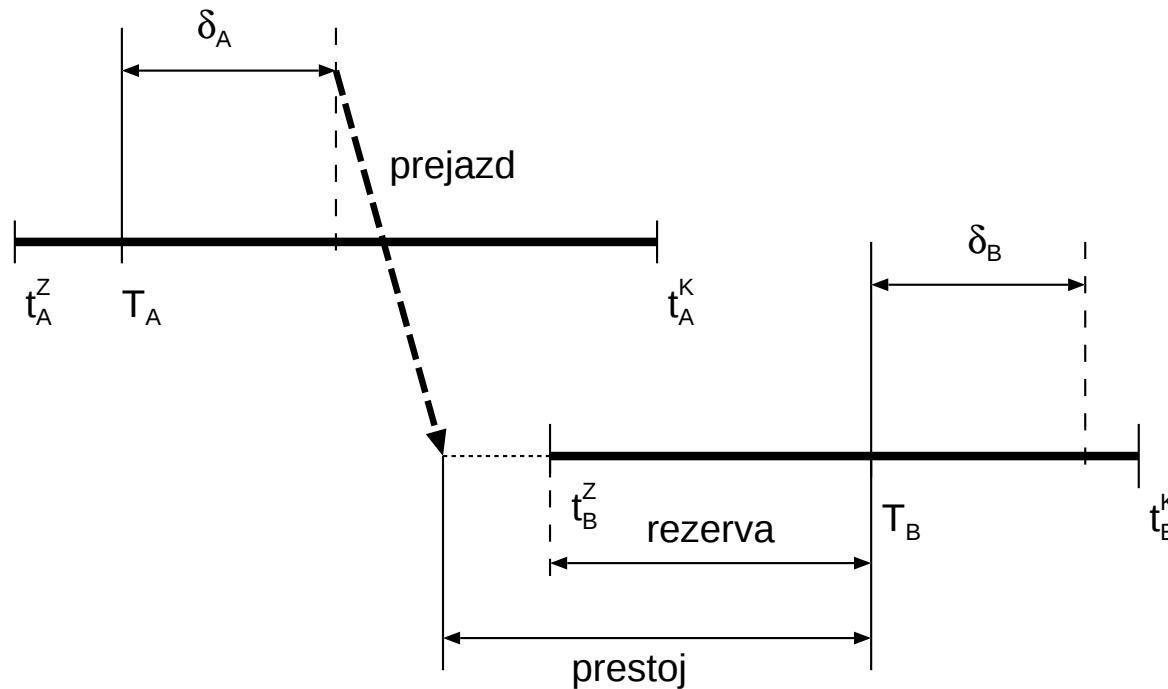
TSP + hľadá sa príchod T_i^P a odchod T_i^O vozidla v časovom okne $[t_i^Z, t_i^K]$ tak, aby $T_i^O - T_i^P \geq \delta_i$ minimálna doba.



Obrázok 2: Ak sú príchody a odchody vozidla k zákazníkovi mimo časových okien sú penalizované.

Týždenné jazdy pojazdných predajní [Peško, Petrů 1983]

4 predajne, 21 dedín v regióne Rimavská Sobota, denná úspora cca 11% = 4.5 km/voz.

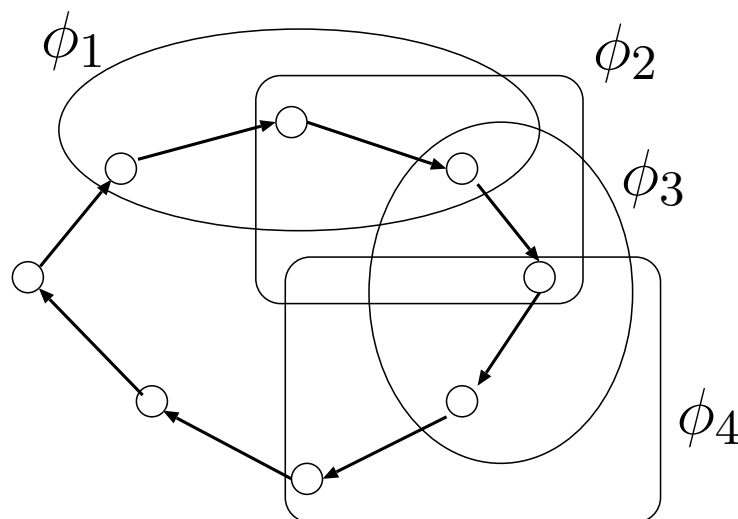


Obrázok 3: Presun predajne z dediny A do dediny B s predajmi dĺžky δ_A, δ_B v časových oknách $[t_A^Z, t_A^K]$.

Metóda kľzavých permutácií [Peško 2001]

hl'adá cyklickú permutáciu π na n -prvkovej množine N výberom najlacnejších permutácií $\phi_i, (1 \leq i \leq n - 1)$ na takých jej q -prvkových ($2 \leq q \ll n$) podmnožinách $N_i \subset N$, že

$$|N_k \cap N_{k+1}| = q - 1, 1 \leq k < n - 1.$$



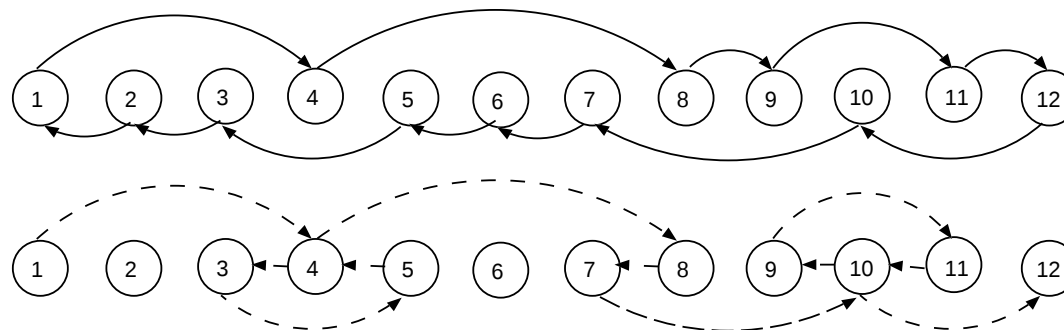
Obrázok 4: Kľzajúce permutácie na 3-prvkových podmnožinách.

Pyramídová metóda [Peško 2000]

hl'adá opakovane cyklickú permutáciu π na n -prvkovej množine v tvare pyramídovej cesty

$$\phi_1 \rightarrow \phi_2 \cdots \rightarrow \phi_{r-1} \rightarrow \phi_r \rightarrow \phi_{r+1} \cdots \rightarrow \phi_{n-1} \rightarrow \phi_n,$$

$$\phi_1 < \phi_2 \cdots < \phi_{r-1} < \phi_r > \phi_{r+1} \cdots > \phi_{n-1} > \phi_n.$$



Obrázok 5: Pyramídový cyklus indukovaný pyramídovou cestou ako najlacnejší pyramídový sled v digrafe.

Pre inštancie s Mongeho maticou je $O(n^2)$ metódou.

Metóda čiastočných súčtov [Martinec,1979]

Veta: Nech $\{d_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^n d_i > 0$. Potom existuje taký index k , že $1 \leq k \leq n$ a platí

$$\forall j : k \leq j \leq n \quad \sum_{i=k}^j d_i > 0,$$

$$\forall j : 1 \leq j < k \quad \sum_{i=k}^n d_i + \sum_{i=1}^j d_i > 0.$$

$$\mathbf{d} = \{1, -1, 3, -2\}, \sum_{i=1}^4 d_i > 0, k = 3; 3 > 0, 3 - 2 > 0, 3 - 2 + 1 > 0, 3 - 2 + 1 - 1 > 0.$$

Implementácia [Peško, Hurtík 2002] SQL dotazmi:

Majme permutáciu ϕ ocenenú $c(\phi)$. **Existuje taká permutácia π aby $c(\pi) < c(\phi)$?** Ako: Položíme $d_i = a_i - c_{i\pi(i)}$, kde $a_i = c_{i\phi(i)}$ poznáme.

Úloha nakupujúceho obchodného cestujúceho - BTSP

Nech je daná matica dopravných nákladov medzi uzlami $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dopravnej siete $D = (d_{ij})$. Obchodný cestujúci v uzle 0 chce nakúpiť sortiment p druhov tovaru, $K = \{1, 2, \dots, p\}$, v množstvách $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ v niektorých predajňach, umiestnených v uzloch $i \in M = N - \{0\}$, ktoré ponúkajú tovar v množstvách $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip})$ za jednotkovú cenu $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ip})$.

Hľadá sa taká pochôdzka obchodného cestujúceho, ktorá začína a končí v 0 a prechádza zvolenými predajňami i v ktorých nakupuje požadované množstvá tovaru. Cieľom je minimalizovať celkové dopravné náklady a náklady za nákup vybraných tovarov.

Premenné x_{ij} ako v TSP;

$x_{ii} = 1$ znamená, že predajňa i nebola navštívená,

$y_{ik} \geq 0$ udáva množstvo tovaru k nakúpeného v predajni i .

MILP model BTSP [Peško 2005]

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in M} \sum_{k \in K} c_{ik} y_{ik} \rightarrow \min \quad (9)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad i \in N, \quad (10)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad j \in N, \quad (11)$$

$$u_i + (n + 1)x_{ij} - u_j \leq n \quad i \in M, j \in M, i \neq j \quad (12)$$

$$y_{ik} + a_{ik}x_{ii} \leq a_{ik} \quad i \in M, k \in K, \quad (13)$$

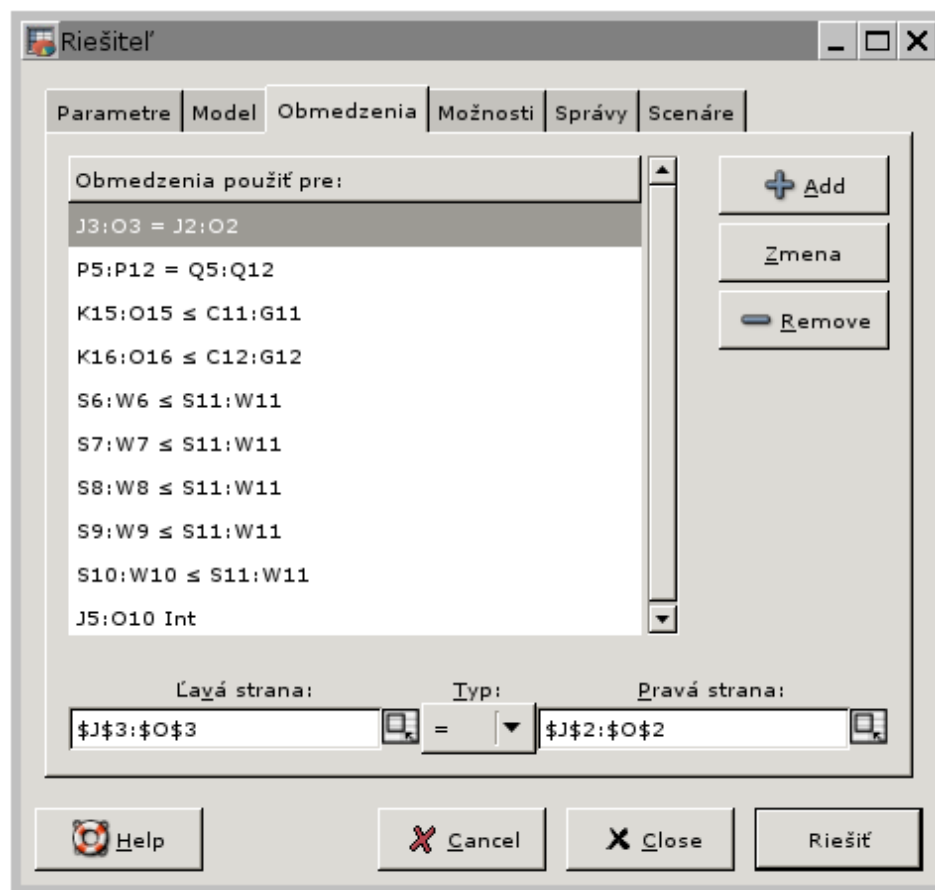
$$\sum_{i \in M} y_{ik} = b_k \quad k \in K, \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in N, j \in N, \quad (15)$$

$$u_i \geq 0 \quad i \in N, \quad (16)$$

$$y_{ik} \geq 0 \quad i \in N, k \in K. \quad (17)$$

MILP model BTSP v Gnumericu



Obrázok 6: Riešenie dvojsortimentovej inštancie v *Solveri* Gnumeric

Úloha prieberčivého obchodného cestujúceho [Palúch 2001]

Nech je daná matica vzdialeností medzi n letiskami (uzlami) $D = (d_{ij})$. Je daný rozklad množiny uzlov $N = \{1, 2, \dots, n\}$ do p tried rozkladu $N_1, N_2, \dots, N_p$ ako letísk štátov. Hľadá sa taký okružný let lietadla reprezentovaný cyklom C , ktorý navštívi v každom štáte práve jedno letisko.

Cieľom úlohy je nájsť taký okružný let lietadla

$$C = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_p \rightarrow i_1, i_k \in N_k,$$

ktorý minimalizuje celkovú preletenú vzdialenosť

$$d(C) = \sum_{k=1}^p d_{i_k, i_{k+1}} + d_{i_p, i_1}.$$

Model prieberčivého obchodného cestujúceho [Pončák 2003]

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (18)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N, \quad (19)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N, \quad (20)$$

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in P: i \neq j} x_{ij} \leq |P| - 1 \quad \forall P \subset S \in \mathcal{C}, |P| \geq 2, \quad (21)$$

$$\sum_{i \in N_k} x_{ii} = |N_k| - 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, p\} \quad (22)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, \forall j \in N, \quad (23)$$

Premenné x_{ij} ako v TSP; ak $x_{ii} = 1$ potom uzol i nebude navštívený.

Okružné úlohy viacerých vozidiel

- Úlohy s jedným skladom (VRP)
- Úlohy s časovými oknami (VRPW)
- Úlohy s viacerými skladmi (CVRP)
- Úlohy s heterogénnym substrátom a autoparkom (HVRP)

Heuristiky:

- Metódy s perturbačnou schémou
- Metódy kríženia cyklov
- Metóda dekompozície

Okružná dopravná úloha z jedného skladu - VRP

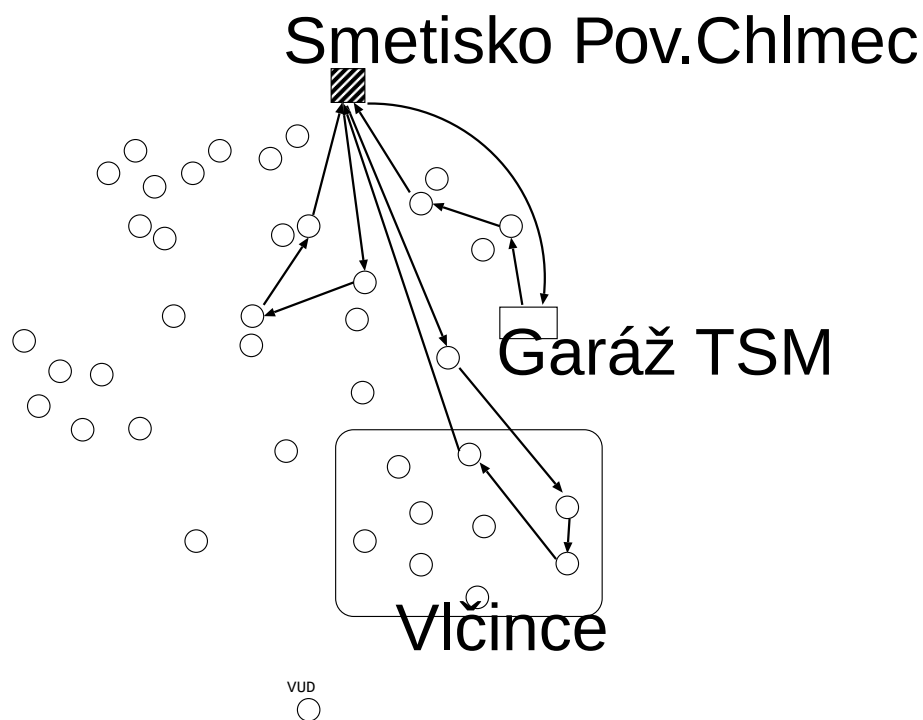
Predpoklady ako v TSP. Navyiac je daná kapacita vozidiel Q v sklade 0 a kapacity požiadaviek $a_1, a_2, \dots, a_n$ v uzloch $N - \{0\}$. Hľadá sa taká množina cyklov $\mathcal{C}$ s jediným spoločným uzlom 0, ktorej cykly:

- 1. majú celkovú kapacitu nanavýš rovnú kapacite vozidla,*
- 2. pokrývajú všetky kapacitné požiadavky zákazníkov,*
- 3. majú v súčte minimálne dopravné náklady.*

Ak môžu byť zákazníci zásobovaní viacerými vozidlami, jedná sa o úlohu s *deliteľnosťou substátu* - cykly riešenia $\mathcal{C}$ môžu mať okrem skladu viacero spoločných uzlov.

Zvoz domového odpadu v Žiline [Peško 1980 - 1981]

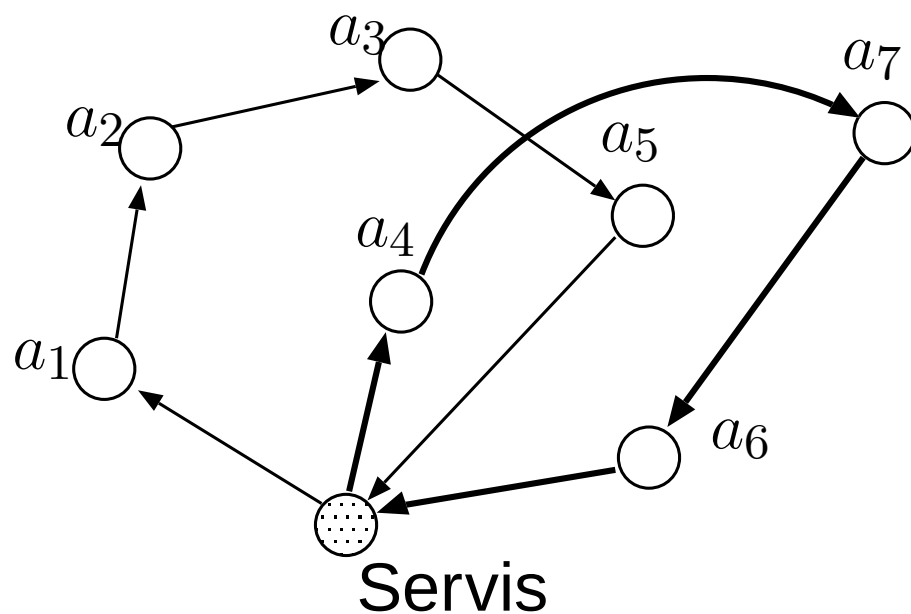
HP9830A, 5 vozidiel (BOBR), úspora denne cca 7% = 5 km/voz.



Obrázok 7: Denná zvozná vlna BOBRa v Žiline, $\bigcirc$ [≈ 100] sú mikrorajóny ohodnotené počtami kontajnerov a úsekmi sú minimálne vzdialenosti medzi centrami mikrorajónov.

Servisné vozidlo dojacej techniky [Tomlein, Peško 1986]

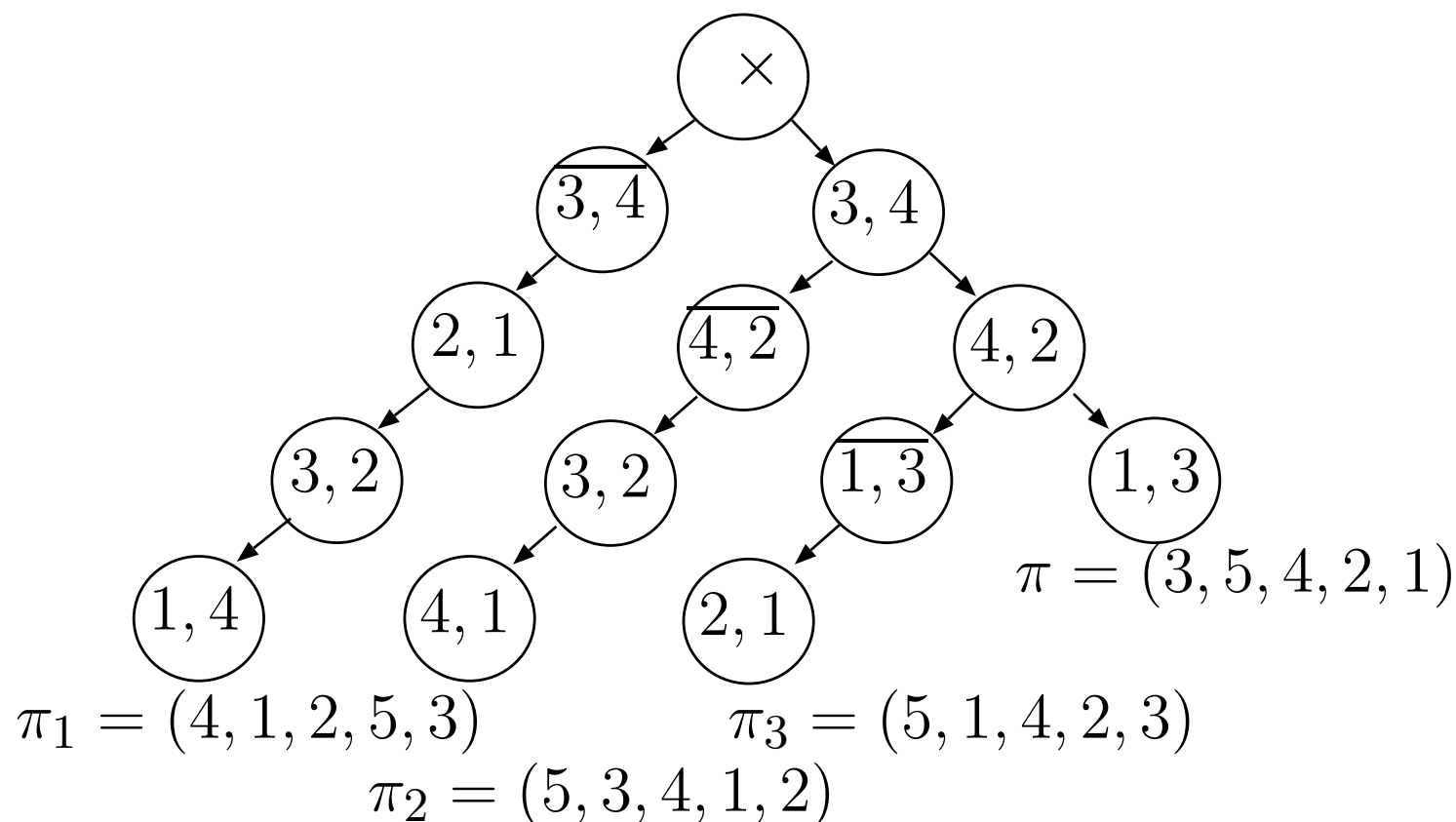
minimalizácia dĺžky periódy povinnej údržby pri minimálnej spotrebe vozidla.



Obrázok 8: Jazdy jedným vozidlom dennej kapacity Q časových jednotiek k zákazníkom (JRD) s požiadavkami na servis v dĺžke a_i časových jednotiek.

Metódy s perturbačnou schémou [Holmes Parker,1975]

Heuristické obmedzené prehľadávanie stromu riešení dočasným zakázaním časti testovaného riešenia.



Obrázok 9: Perturbačná schéma pre TSP s 5 mestami.

Rozvoz uhlia maloodberateľom [Peško, Kocúr 1984]

v okresoch Stredoslovenského kraja:

- množina zákazníkov $V = \{1, 2, \dots, n\}$,
- neobmedzený počet vozidiel v sklade 0,
- vozidlo s kapacitou Q ton obsluhuje nanajvýš 2 zákazníkov,
- nedeliteľnosť i -tej zakázky s kapacitou a_i ton,
- vzdialenosť medzi zákazníkmi $c_{ij}, i \in V, j \in V, i \neq j$,
- $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$ úspora km ak $a_i + a_j \leq Q$ ináč 0.
- $x_{ij} = 1$ ak sú zákazníci $i, j \in V$ obslužení jazdou $0 \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow 0$,

01-LP model rozvozu uhlia maloodberateľom

Úloha najcennejšieho párovania v úplnom digrafe

$G = (V, H, s)$, $H = \{(i, j) : a_i + b_j \leq Q, i \in V, j \in V, i < j\}$ je riešiteľná v tabulkových procesoroch Gnumeric a Calc:

$$\sum_{(i,j) \in H: i < j} \max(s_{ij}, s_{ji}) x_{ij} \rightarrow \max \quad (24)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (25)$$

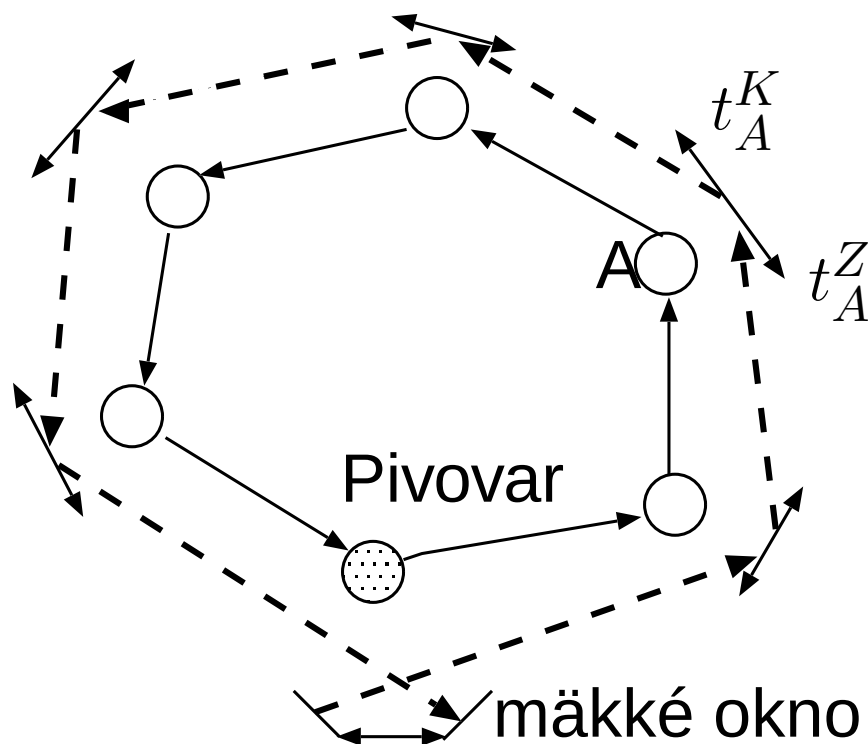
$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V \quad (26)$$

$$x_{ij} - x_{ji} = 0 \quad (i, j) \in H, i < j \quad (27)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in H \quad (28)$$

Rýchle implementácie Edmondsovho kvetové $O(n^3)$ algoritmu riešia euklidovské úlohy s $n = 10^6$ do 3 sekúnd!

naviac koordinácia príchodov vozidiel na rampách pivovaru a zakázané odbočovanie pri jazde veľkomestom.



Obrázok 10: Jazda jedného z vozidiel s mäkkými časovými oknami do pivovaru a tvrdými časovými oknami do predajní.

Okružná dopravná úloha z viacerými skladmi - CVRP

Predpoklady ako VRP. Navyiac je daná množina skladov $S = \{1, 2, \dots, s\}$ z ktorých treba zásobovať zákazníkov $Z = \{s + 1, s + 2, \dots, n\}$ tovarom. Nech ponúkaná a požadovaná kapacita v uzloch $S \cup Z$ je daná n -ticou

$$(a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n).$$

Hľadá sa taká množina množín cyklov $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_s\}$, že okružné jazdy:

- 1. v C_i , $1 \leq i \leq s$ sú kapacitne prípustné,*
- 2. pokrývajú požiadavky zákazníkov a_j , $s < j \leq n$,*
- 3. majú v súčte minimálne dopravné náklady.*

Pri rozvoze nábytku v Žiline [Peško 1988] riešené metódou perturbačnej schémy aplikovanej na dopravnú úlohu.

Úloha s heterogénnym substrátom a autoparkom - HVRP

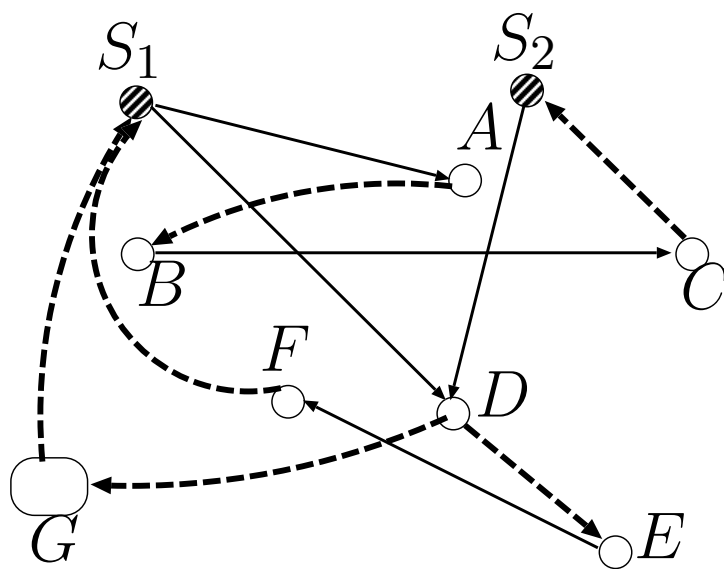
*Predpoklady ako CVRP. Navyiac je daná množina garáží G s počtami typyzovaných vozidiel podľa nosnosti, zoznamu prípustných substrátov a zoznamu zakázaných kombinácií substrátov. Hľadajú sa také okružné jazdy vozidiel tvorené **uzavretými sledmi** uzlov začínajúcimi a končiacimi v domovskej garáži, obsahujúcimi sklad $\leftrightarrow$ zákazník a zákazník $\rightarrow$ zákazník, že*

- 1. všetky jazdy sú kapacitne prípustné,*
- 2. vodiči neprekračujú denný časový výkon,*
- 3. pokrývajú požiadavky zákazníkov*
- 4. majú v súčte minimálne dopravné náklady.*

V štúdii [Peško, Engelthaller 1988] je rozvoz substrátov v stavebnom podniku riešený metódou perturbačnej schémy aplikovanej na pažravú (greedy) metódu.

System TYROS [Peško, Engelthaller 1991]

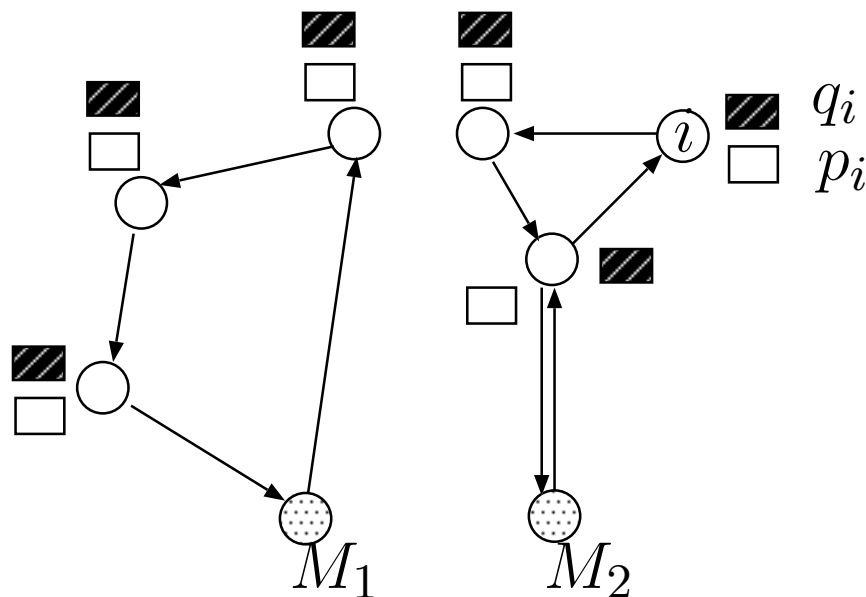
TÝždenný ROzvoz Stavebnín v okrese Košice. Požiadavku optimalizovať i časový rozvrh v týždni s toleranciou $\pm$ deň sa nepodarilo.



Obrázok 11: Zásobovacia jazda vozidla z 2 skladov na 5 stavieb $G \rightarrow S_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow S_2 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow S_1 \rightarrow D \rightarrow G$.

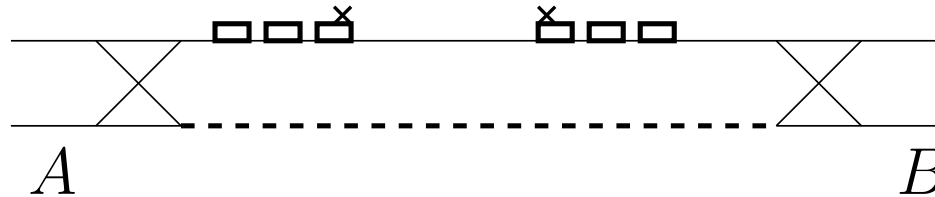
Rozvoz mlieka v regióne Rimavská Sobota-Šafárikovo [Peško, Gál 1987]

- obmedzený počet kapacitne rovnakých vozidiel v mliekarňach $n_1, n_2, \dots, n_p$,
- predpísaný počet prázdnych p_i a plných q_i prepraviek v i -tej predajni.



Obrázok 12: 2 druhy jázd k predajňam z mliekarní M_1, M_2 .

Výlukový grafikon vlakovej dopravy na jednej koľaji - VGVD



Obrázok 13: Výluka traťovej koľaje na traťovom úseku AB

Je daný modelový hranovo-vrcholovo ohodnotený digraf

$G = (V, E, c, w, d, p)$, kde

- *$V = \{1, 2, \dots, n\}$ a $E \subset V \times V$ sú množina vlakov a množina prípustných následností vlakov,*
- *c_{ij} a w_{ij} sú ocenenia a následné medzidobia následností vlakov $i \rightarrow j$,*
- *d_i a p_i sú pravidelný odchod vlaku i a penalizácia minúty jeho meškania.*

Model VGVD [Peško, Potočiar 2001]

Hľadajú sa také odchody vlakov $t_i, i \in V$ aby bolo celkové ocenenie nákladov na realizáciu GVD po jednej kol'aji minimálne, pri prípustnom splnení následných medzidobí bezprostredne nasledujúcich vlakov.

Ani experimenty s metódou ACS (Ant Colony System) [Peško 2003] ani s pyramídovou metódou [Potočiar 2001] nepriniesli prijateľné výsledky ale až s metódou kĺzavých permutácií [Drotárová 2010], ktorej implemetácia bola na reálnych inštanciách nanajvýš o 9.7% horšia ako optimum.

Rozhodovacie premenné x_{ij} a pomocné premené y_{ij} sú ako v Makhorinova formulácii TSP: $x_{ij} = 1$ ak hľadaný sled vlakov indukovaný odchodmi vlakov obsahuje hranu $i \rightarrow j$.

MILP model VGVD [Peško, Drotárová 2010]

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in V} p_i (t_i - d_i) \rightarrow \min$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \quad i \in V,$$

$$\sum_{i \in V: (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \quad j \in V,$$

$$y_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \quad (i,j) \in E,$$

$$\sum_{k \in V: (k,i) \in E} y_{ki} + n(k=1) = \sum_{k \in V: (i,k) \in E} y_{ik} + 1 \quad i \in V,$$

$$-t_j + t_i + x_{ij}(w_{ij} + 1000000) \leq 1000000 \quad (i,j) \in E, j > 1,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in E,$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in E,$$

$$t_i \geq d_i \quad (i,j) \in E.$$

Ďakujem za pozornosť

Cieľom bolo vyčerpať tému a nie poslucháčov...