

Hadwigerov – Nelsonov problém a jednotkovo nakresliteľné grafy

Tomáš Madaras

ÚMV PF UPJŠ, Košice

Pracovné stretnutie riešiteľov Centra excelentnosti CEX CaKS
Nový Smokovec, 10. - 12.10.2010



Európska únia
Európsky fond regionálneho rozvoja



Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Podporujeme výskumné aktivity na Slovensku/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Použité označenia:

$\mathbb{R}^2$	...	rovina
$\rho(A, B)$	...	euklidovská vzdialenosť bodov $A, B \in \mathbb{R}^2$ $\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ pre $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$
$\ell_1(A, B)$	...	Manhattanská vzdialenosť bodov $A, B \in \mathbb{R}^2$ $\ell_1(A, B) = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 $
$\ell_\infty(A, B)$	...	Čebyševova vzdialenosť bodov $A, B \in \mathbb{R}^2$ $\ell_\infty(A, B) = \max\{ a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \}$

Problém (H. Hadwiger, E. Nelson 1950)

Určte najmenší možný počet farieb potrebných na ofarbenie všetkých bodov euklidovskej roviny tak, aby každé dva body, ktorých vzájomná euklidovská vzdialenosť je jednotková, boli ofarbené navzájom rôznymi farbami.

Najmenší počet farieb potrebný na uvedené ofarbenie bodov roviny sa nazýva **chromatické číslo roviny** a označuje sa $\chi(\mathbb{R}^2)$

Grafová interpretácia problému: uvažujeme graf, ktorého množinu vrcholov tvoria všetky body roviny $\mathbb{R}^2$ a množinu hrán tvoria dvojice bodov roviny, ktorých vzájomná vzdialenosť je jednotková. Úlohou je určiť chromatické číslo tohto grafu.

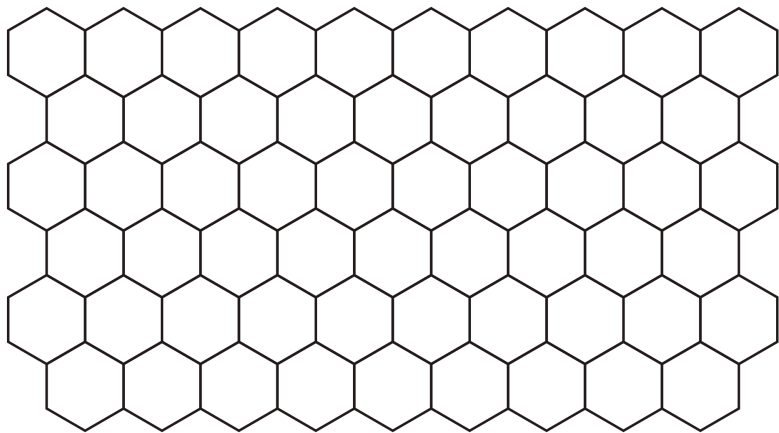
Takto zostrojený graf je nekonečný a navyše všetky jeho vrcholy majú nekonečné stupne; napriek tomu je jeho chromatické číslo konečné:

Veta (Erdős, de Bruijn)

Nech k je prirodzené číslo a nech pre graf G platí, že pre každý konečný podgraf $H \subseteq G$ je $\chi(H) \leq k$. Potom $\chi(G) \leq k$.

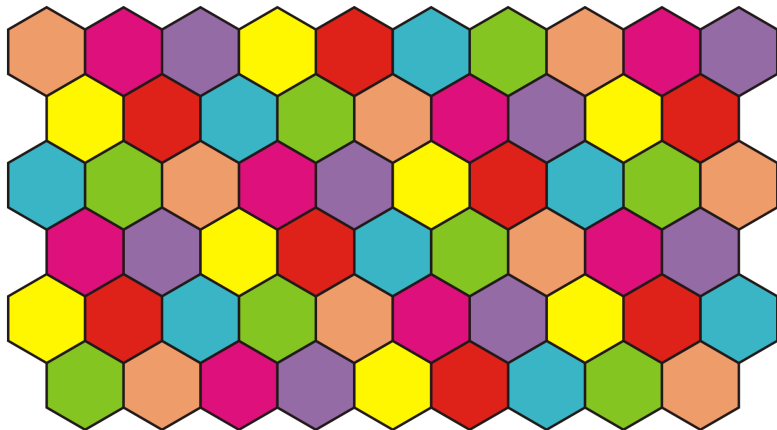
Horná hranica: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

Dôkaz (Isbell 1950; Hadwiger 1961): rozklad roviny na 7 množín
využitím regulárneho dláždenia šesťuholníkmi priemeru $1 - \varepsilon$:



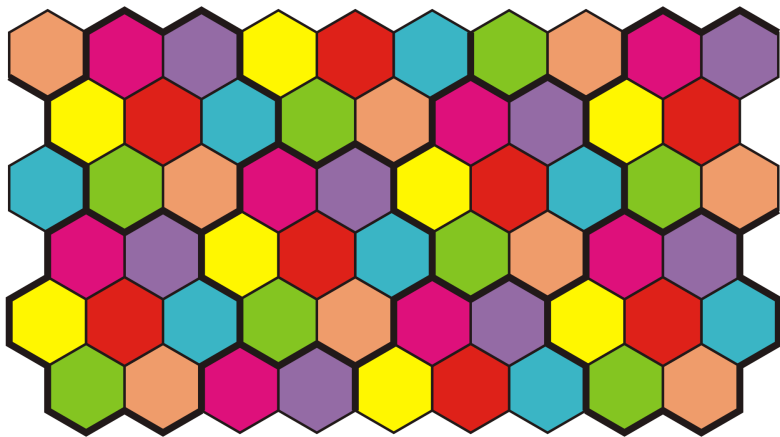
Horná hranica: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

Dôkaz (Isbell 1950; Hadwiger 1961): rozklad roviny na 7 množín
využitím regulárneho dláždenia šesťuholníkmi priemeru $1 - \varepsilon$:

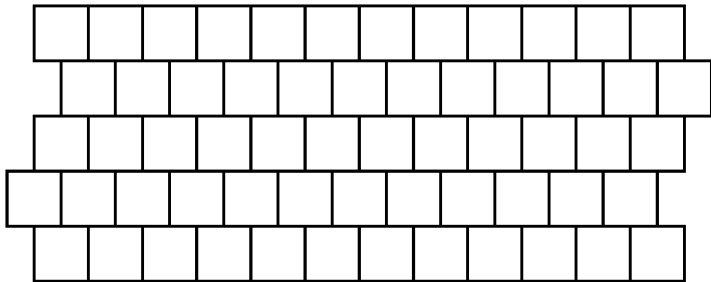


Horná hranica: $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

Dôkaz (Isbell 1950; Hadwiger 1961): rozklad roviny na 7 množín
využitím regulárneho dláždenia šesťuholníkmi priemeru $1 - \varepsilon$:

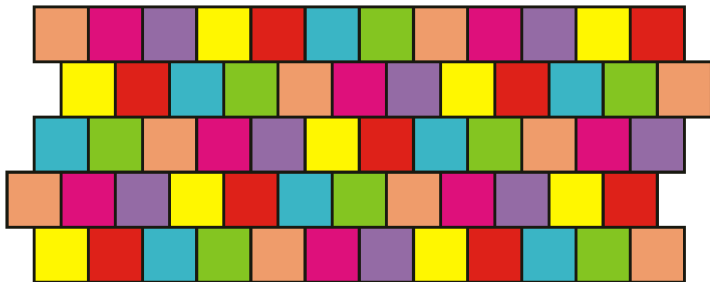


Iný dôkaz (Székely 1982): rozklad roviny na 7 množín využitím dláždenia štvorcami s uhlopriečkou 1:



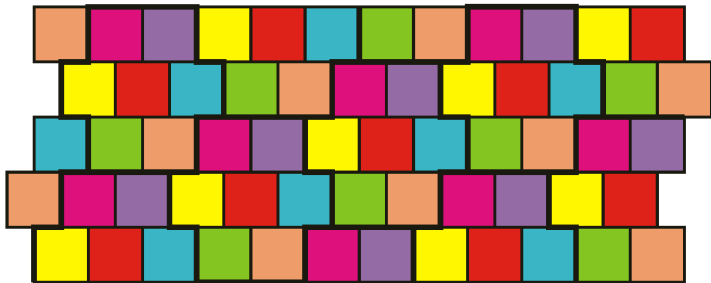
(pozn. horná a pravá hrana každého štvorca – až na horný ľavý a dolný pravý roh – majú farbu príslušného štvorca)

Iný dôkaz (Székely 1982): rozklad roviny na 7 množín využitím dláždenia štvorcami s uhlopriečkou 1:



(pozn. horná a pravá hrana každého štvorca – až na horný ľavý a dolný pravý roh – majú farbu príslušného štvorca)

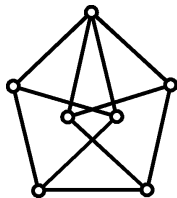
Iný dôkaz (Székely 1982): rozklad roviny na 7 množín využitím dláždenia štvorcami s uhlopriečkou 1:



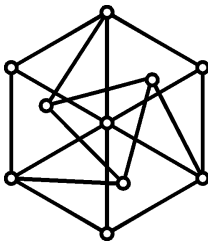
(pozn. horná a pravá hrana každého štvorca – až na horný ľavý a dolný pravý roh – majú farbu príslušného štvorca)

Dolná hranica: $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$

Dôkaz: graf s hranami jednotkovej dĺžky (tzv. vreteno Moserovcov, 1961), ktorý nie je 3-chromatický:



Iný dôkaz: Golombov graf (S. Golomb, 1960 – 1965):



Chromatické číslo n -rozmerného priestoru

Hadwigerov–Nelsonov problém možno uvažovať všeobecne pre priestor $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou vzdialenosťou:

Veta (Raiskii, 1970)

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2.$$

Najlepšie doposiaľ známe dolné odhady:

Dimenzia	Odhad	Pozn.
3	6	Nechushtan 2000
4	7	Cantwell 1996
5	9	
6	11	Cibulka 2008

Platí, že $\chi(\mathbb{R}^n)$ rastie exponenciálne vzhľadom na n :

Veta (Frankl, Wilson 1981)

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1 + o(1)) \left(\frac{6}{5}\right)^n.$$

Najlepšie známe horné odhady sú exponenciálne vzhľadom na dimenziu priestoru:

Veta (Larman, Rogers 1972)

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Hypotéza (Soifer)

$$\chi(\mathbb{R}^n) = 2^{n+1} - 1$$

Ak by existoval 7-chromatický graf, ktorý by bol jednotkovo nakresliteľný v rovine, tak by mal aspoň 6198 vrcholov (Pritikin 1998).

Chromatické číslo racionálnych priestorov

Skúmajú sa tiež variácie Hadwigerovho–Nelsonovho problému pre špeciálne priestory.

Označenie: $\mathbb{Q}^n$... množina všetkých usporiadaných n -tíc racionálnych čísel

Veta (Woodall 1973)

$$\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$$

Hodnoty a dolné odhady pre $\chi(\mathbb{R}^n)$:

Dimenzia	Hodnota/odhad	Pozn.
3	2	Benda, Perles ≤ 2000
4	4	
5	≥ 8	Cibulka 2008
6	≥ 10	Mann 2003
7	≥ 15	Cibulka 2008
8	≥ 16	Mann 2003

Dimenzia a euklidovská dimenzia grafu

Definícia

Dimenzia $\dim(G)$ grafu G je najmenšie prirodzené číslo n také, že G má jednotkové nakreslenie v $\mathbf{R}^n$.

Problém (Hadwiger, Nelson – ekvivalentná formulácia)

Určte maximálne chromatické číslo grafu dimenzie 2.

Dimenzia grafu je monotónny invariant: ak $H \subseteq G$, tak $\dim(H) \leq \dim(G)$.

Veta

Pre ľubovoľný graf G platí $\dim(G) \leq 2\chi(G)$.

Prehľad výsledkov o dimenzii vybraných grafov:

Graf	Dimenzia	pozn.
K_n	$n - 1$	$n \geq 2$
K_n^-	$n - 2$	$n \geq 3$
$K_{m,1}$	1	$m = 1, 2$
	2	$m \geq 3$
$K_{m,2}$	2	$m = 2$
	3	$m \geq 3$
$K_{m,n}$	4	$m \geq n \geq 3$
W_n	3	$m \neq 6$
	2	$m = 6$

Definícia

*Nakreslenie D grafu G v priestore $\mathbb{R}^n$ sa nazýva **euklidovské**, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V(D)$ je $\rho(u, v) = 1$ práve vtedy, keď $uv \in E(G)$.*

Definícia

Euklidovská dimenzia $\text{Edim}(G)$ grafu G je minimálne n také, že existuje euklidovské nakreslenie G v $\mathbb{R}^n$.

Euklidovská dimenzia grafu **nie je** monotónny invariant: pre 7-vrcholové koleso W_6 a graf G , ktorý z neho vznikne odstránením jednej z neobvodových hrán, platí $G \subseteq W_6$, ale $\text{Edim}(W_6) = 2, \text{Edim}(G) = 3$.

Pre každý graf G platí $\dim(G) \leq \text{Edim}(G)$; rozdiel medzi dimenziou a euklidovskou dimenziou grafu pritom môže byť ľubovoľne veľký:

Veta (Erdős, Simonovits 1980)

Pre každé prirodzené číslo n existuje graf G_n taký, že $\dim(G) \leq 4$ a $n - 2 \leq \text{Edim}(G) \leq n - 1$.

Veta (Lovász, Saks, Schrijver 1989)

Pre ľubovoľný graf G platí $\text{Edim}(G) \leq 2\Delta(G)$.

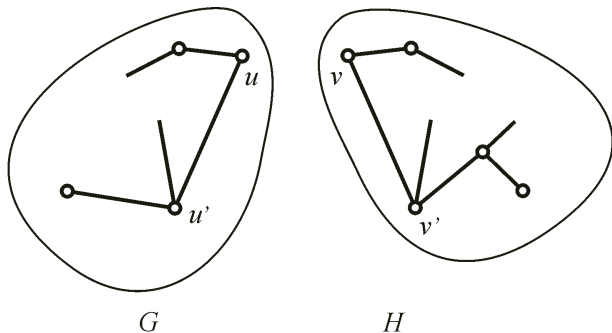
Jednotkovo nakresliteľné podgrafy v grafoch

Doteraz nebol nájdený príklad jednotkovo nakresliteľného grafu (v rovine), ktorý by mal chromatické číslo aspoň 5. Na druhej strane existujú ≥ 5 -chromatické grafy, ktoré majú "veľké" jednotkovo nakresliteľné podgrafy.

Netriviálnou otázkou je konštrukcia nekonečnej postupnosti ≥ 5 -**kritických** grafov G_n (t.j. grafov, ktorých chromatické číslo klesne po odobratí ľubovoľnej hrany), ktoré obsahujú jednotkovo nakresliteľné podgrafy J_n také, že podiel počtu hrán J_n a G_n sa limitne blíži k 1.

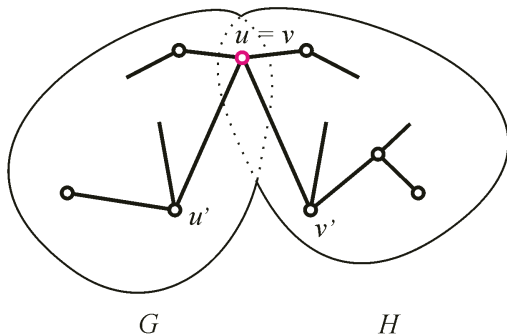
Hajósova konštrukcia

Z daných dvoch grafov G, H s hranami $uu' \in E(G), vv' \in E(H)$ skonštruujeme nový graf $G\Delta H$ tak, že stotožníme vrcholy u a v , odstránime hrany uu', vv' a pridáme novú hranu $u'v'$:



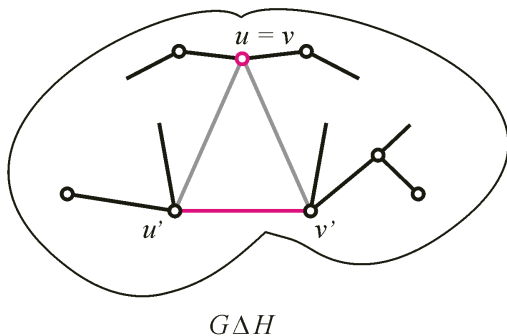
Hajóssova konštrukcia

Z daných dvoch grafov G, H s hranami $uu' \in E(G), vv' \in E(H)$ skonštruujeme nový graf $G\Delta H$ tak, že stotožníme vrcholy u a v , odstránime hrany uu', vv' a pridáme novú hranu $u'v'$:



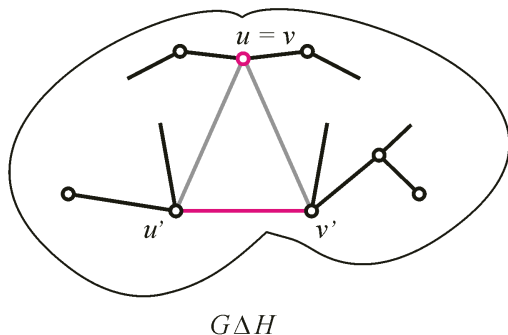
Hajóssova konštrukcia

Z daných dvoch grafov G, H s hranami $uu' \in E(G), vv' \in E(H)$ skonštruujeme nový graf $G\Delta H$ tak, že stotožníme vrcholy u a v , odstránime hrany uu', vv' a pridáme novú hranu $u'v'$:



Hajóssova konštrukcia

Z daných dvoch grafov G, H s hranami $uu' \in E(G), vv' \in E(H)$ skonštruujeme nový graf $G\Delta H$ tak, že stotožníme vrcholy u a v , odstránime hrany uu', vv' a pridáme novú hranu $u'v'$:



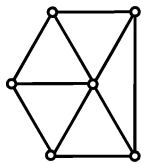
Lema

Ak G, H sú k -kritické grafy, tak $G\Delta H$ je tiež k -kritický.

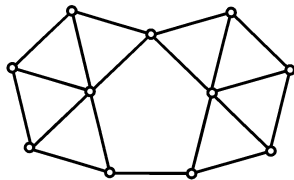
Veta (Široczi, T.M. 2010)

Existuje nekonečne veľa 4-kritických planárnych grafov, ktorých euklidovská dimenzia je 2.

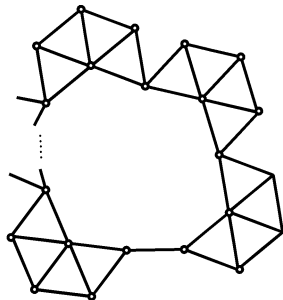
Dôkaz: postupné aplikovanie Hajósovej konštrukcie vhodným spôsobom:



G_1



$G_2 = G_1 \Delta G_1$



$G_n = G_{n-1} \Delta G_1$

Veta (Široczi, T.M. 2010)

Existuje nekonečná postupnosť 5-kritických (resp. 6- a 7-kritických) grafov G_n taká, že pomer počtu hrán J_n najväčšieho jednotkového podgrafu G_n a počtu hrán G_n konverguje ku $\frac{8}{9}$ (resp. $\frac{5}{7}$ a $\frac{13}{20}$).

Dôkaz: postupnosť $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa získa postupným aplikovaním Hajósovej konštrukcie pri $G_1 = K_5$ (resp. K_6 alebo K_7) a $G_n = G_{n-1} \Delta G_{n-1}$ pre $n \geq 2$; v každom kroku možno Hajósovú konštrukciu uvažovať ako operáciu na jednotkovo nakresliteľných podgrafoch J_{n-1} .

V prípade konštruovaných 5-kritických grafov je $|E(G_n)| = 2^{n+2} + 2^{n-1} + 1$, $|E(J_n)| = 2^{n+2} - 1$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E(J_n)|}{|E(G_n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2} + 2^{n-1} + 1} = \frac{8}{9}$$

Otázka

Aké veľké jednotkovo nakresliteľné podgrafy možno nájsť v grafoch vo všeobecnosti?

Ak má graf na pevnom počte vrcholov veľa hrán, tak s veľkou pravdepodobnosťou obsahuje K_4 resp. $K_{2,3}$ ako podgraf, a teda nie je jednotkovo nakresliteľný; z Turánovej vety dostávame napr., že maximálny počet hrán grafu, ktorý neobsahuje K_4 , je $\frac{n^2}{3}$.

Na druhej strane, grafy s malým počtom hrán sú "podobné stromom", teda je viac pravdepodobné, že majú jednotkové nakreslenie.

Lema

Každý strom má jednotkové nakreslenie v rovine.

Definícia

Nakreslenie $D = D(G)$ grafu G (pozn. nie nutne planárneho) sa nazýva ε -tenké, ak existuje vrchol $X \in V(D)$ taký, že D je (ako množina bodov roviny) podmnožinou nejakého uhla s vrcholom X a veľkosťou ε .

Lema

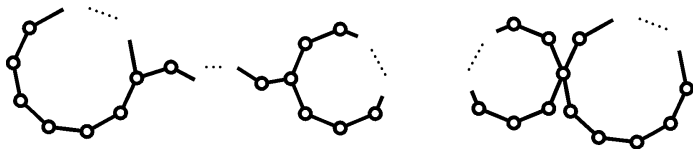
Pre každé $\varepsilon > 0$ a každý strom T existuje ε -tenké jednotkové nakreslenie T v rovine.

Každý súvislý graf s n vrcholmi a n hranami je **unicyklický**: obsahuje jedinú kružnicu, na ktorú môžu byť pripojené ďalšie stromy.

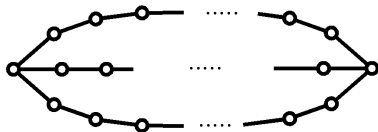
Jednotkové nakreslenie unicyklického grafu možno získať z jednotkového nakreslenia kružnice a z ε -tenkých nakreslení koreňových stromov, ktorých korene sú vrcholmi danej kružnice. Kružnicu unicyklického grafu možno jednotkovo nakresliť napr. ako pravidelný mnohoúhelník a stromy, ktoré sú na ňu potenciálne pripojené, sa nakreslia ε -tenké (ε pritom treba zvoliť dostatočne malé, aby nedošlo k prekryvu nakreslení stromov).

n -vrcholové grafy s $n + 1$ hranami

Každý súvislý graf s n vrcholmi a n hranami je **bicyklický** (obsahuje práve dve kružnice, ktoré môžu byť spojené cestou) alebo obsahuje **θ -graf** (trojicu vnútorne disjunktných ciest so spoločnými koncovými vrcholmi) ako podgraf:



bicyklický graf

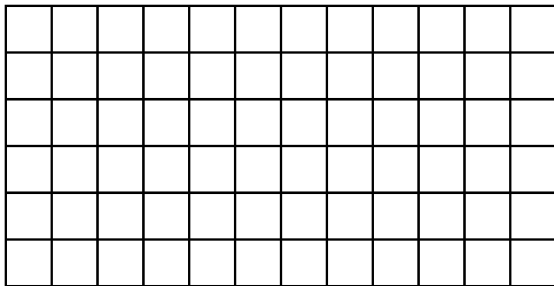


θ -graf

Okrem grafov, ktoré obsahujú $K_{2,3}$ ako podgraf sú všetky súvislé n -vrcholové grafy s $n + 1$ hranami jednotkovo nakresliteľné v rovine: nakreslenie bicyklických grafov vychádza z nakreslenia oboch kružníc ako pravidelných mnohoúhelníkov (prípadné pripojené stromy sa nakreslia ε -tenké vo "vhodnom smere"); pre θ grafy existujú separátne konštrukcie v závislosti od dĺžok ciest, ktoré ich vytvárajú.

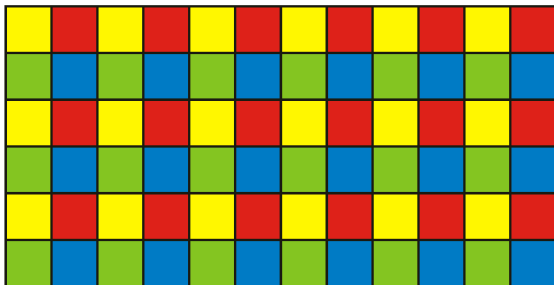
Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



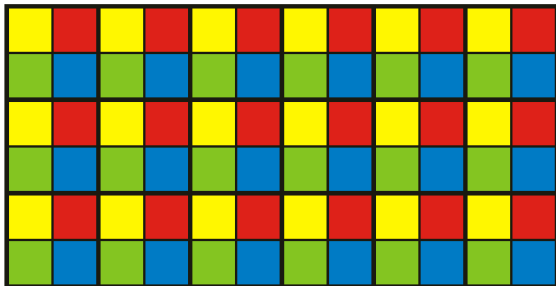
Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



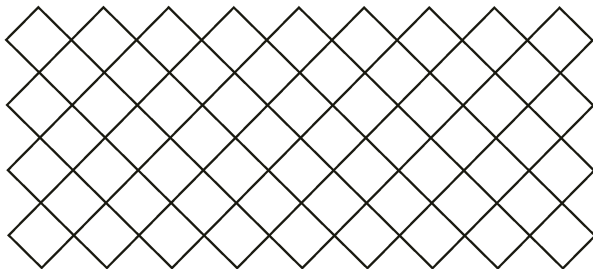
Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



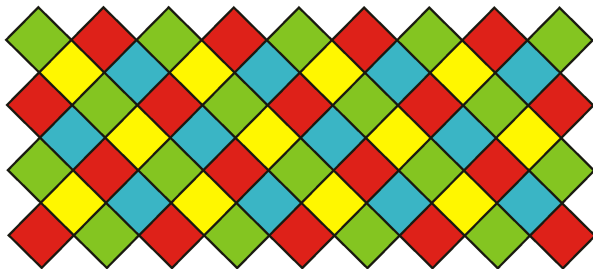
Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



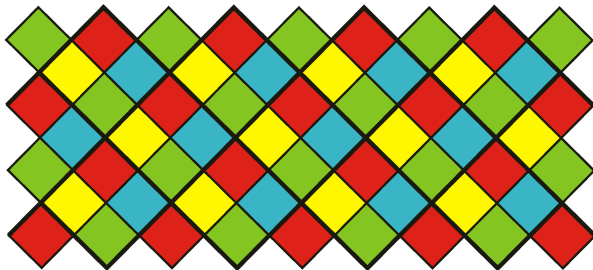
Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



Hadwigerov–Nelsonov problém s inou metrikou

Ak miesto euklidovskej vzdialenosti budeme uvažovať Manhattanskú resp. Čebyševovu vzdialenosť, tak chromatické číslo roviny je 4: pre obe vzdialenosti existuje v rovine štvorica bodov vo vzájomných jednotkových vzdialenostiach. Ďalej, regulárne dláždenie roviny štvorcami (vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť) zodpovedá rozkladu roviny (s Manhattanskou resp. Čebyševovou vzdialenosťou) na jednotkové gule, ktoré možno ofarbiť 4 farbami tak, aby žiadne dva body rovnakej farby neboli vo vzdialenosti 1.



Na druhej strane, chromatické číslo roviny s triviálnou metrikou (vzdialenosť každých dvoch rôznych bodov je definovaná ako jednotková) nie je konečné.

Otázka

Možno pre každé prirodzené n definovať metriku d v rovine tak, aby v $\mathbb{R}^2$ existovalo n bodov takých, že ich všetky vzájomné vzdialenosti sú jednotkové ?

Definícia

Rovnostranná dimenzia *metrického priestoru* (X, d) *s metrikou* d *je maximálny počet bodov* X , *ktorých vzájomné vzdialenosti sú rovnaké.*

Hypotéza (Kusner)

Rovnostranná dimenzia $\mathbb{R}^n$ *s Manhattanskou metrikou je rovná* $2n$.

Ďakujem za pozornosť :-S