

Lineárna optimalizácia a kvadratické programovanie

Ondrej Šuch

Katedra informatiky
FPV UMB

12. októbra 2010



Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Podporujeme výskumné aktivity na Slovensku/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Outline

- 1 LP problémy a simplexová metóda
- 2 Karmarkova metóda
- 3 Metóda T. Juríka
- 4 Kvadratické programovanie
- 5 Výskumné otázky

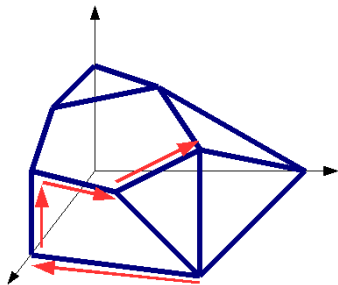
Formulácia problému

1939 L.V.Kantorovič, 1947 Dantzig

- $\min c'x$ za podmienky $Ax \leq b$
- $\min c'x$ za podmienok $Ax = b, x \geq 0$
- $\min c'x$ za podmienok $A_1x = b_1,$
 $A_2x \leq b_2,$
 $lb \leq x \leq ub$

Simplexová metóda

1947 Dantzig



2-fázy simplexovej metódy

- 1.fáza hľadá sa bod na konvexnom polytópe, čo je sám o sebe LP problém
- 2.fáza hľadá sa optimum

Degenerácia a zacyklenie

Metódy na riešenie problému zacyklenia

- perturbácia 1952 Charnes
- lexikografická metóda 1955 Dantzig, Orden, Wolfe
- metóda najmenších indexov 1977 Bland

Degenerácia a zacyklenie

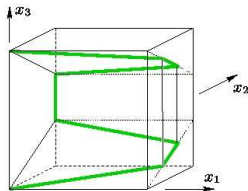
Metódy na riešenie problému zacyklenia

- perturbácia 1952 Charnes
- lexikografická metóda 1955 Dantzig, Orden, Wolfe
- metóda najmenších indexov 1977 Bland

Problém zisťovanie degenerácie je NP-zložitý (1981
Chandrasekaran, Kabadi, Murty)

Zložitosť simplexovej metódy

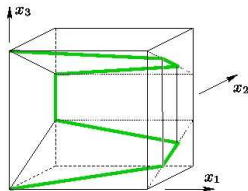
1972 Klee-Minty



$$\begin{aligned}0 &\leq x_1 \leq 1 \\ \tau x_1 &\leq x_2 \leq 1 - \tau x_1 \\ \tau x_2 &\leq x_3 \leq 1 - \tau x_2\end{aligned}$$

Zložitosť simplexovej metódy

1972 Klee-Minty



$$\begin{aligned}0 &\leq x_1 \leq 1 \\ \tau x_1 &\leq x_2 \leq 1 - \tau x_1 \\ \tau x_2 &\leq x_3 \leq 1 - \tau x_2\end{aligned}$$

1994 Gärtner, Ziegler - náhodný pivot vyžaduje $O(n^2)$ krokov

Priemerná zložitosť simplexovej metódy

1985 I.Adler, N. Megiddo

Veta

Ak sú problémy generované z dostatočne “symetrickej” a hladkej pravdepodobnostnej distribúcie, potom pre očakávaný počet krokov platí

$$c_1(\min(m, n))^2 \leq \rho(m, n) \leq c_2(\min(m, n))^2$$

Podobné výsledky dosiahli tiež Borgwardt, Smale, Haimovich, Karp, Shamir, Todd.

Zložitosť pod vplyvom perturbácií

2001 D.Spielman, S.Teng

Priemerná komplexita simplexovej metódy v okolí ľubovlného problému je polynomiálna.

Počet nutných krokov simplexovej metódy je najviac $n - d$.

Hirshova domnienka

Počet nutných krokov simplexovej metódy je najviac $n - d$.

- dokázaná pre $d < 6$, 1967 Klee-Walkup

Počet nutných krokov simplexovej metódy je najviac $n - d$.

- dokázaná pre $d < 6$, 1967 Klee-Walkup
- subexponenciálna hranica $n^{O(\sqrt{d})}$, 1992 Kalai

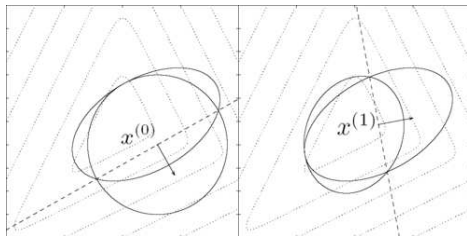
Hirshova domnienka

Počet nutných krokov simplexovej metódy je najviac $n - d$.

- dokázaná pre $d < 6$, 1967 Klee-Walkup
- subexponenciálna hranica $n^{O(\sqrt{d})}$, 1992 Kalai
- vyvrátená v dimenzii $d = 43$, 2010 F. Leal

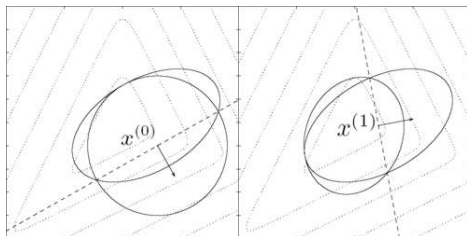
Elipsoidná metóda

1979 L.G. Chačijan



Elipsoidná metóda

1979 L.G. Chačijan



L. Lovász *Zdá sa, že skoro všetky problémy kombinatorickej optimalizácie, ktoré sú riešiteľné pomocou efektívneho algoritmu, možno riešiť kombináciou elipsoidnej metódy a pažravého algoritmu.* The Mathematical Intelligencer (1980)

Iné metódy

- metódy vnútorného bodu
- randomizované kombinatorické metódy
- metódy založené na Tichonovovej regularizácii
- ...

Iné metódy

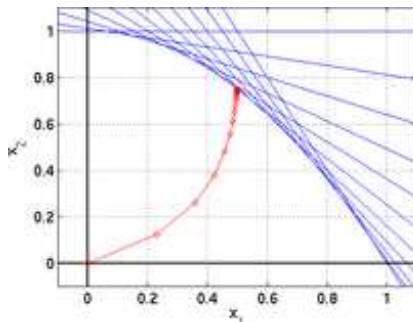
- metódy vnútorného bodu
- randomizované kombinatorické metódy
- metódy založené na Tichonovovej regularizácii
- ...

Otvorený problém: nájsť silne polynomiálny algoritmus

Outline

- 1 LP problémy a simplexová metóda
- 2 Karmarkova metóda**
- 3 Metóda T. Juríka
- 4 Kvadratické programovanie
- 5 Výskumné otázky

Metódy vnútorného bodu



Riešenia sú iteratívne konštruované vnútri konvexného polytópu, väčšinou sa pohybujú po *centrálnej* ceste.

Nelineárny problém

$f : R_+^n \rightarrow R$ spojitá diferencovateľná, A je typu $m \times n$

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Nelineárny problém

$f : R_+^n \rightarrow R$ spojitá diferencovateľná, A je typu $m \times n$

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Predpokladá sa, že x^0 je dané.

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

$$h := -P \nabla \bar{f}(e), \text{ kde } P := I - \bar{A}'(\bar{A}\bar{A}')^{-1} \bar{A}$$

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

$$h := -P \nabla \bar{f}(e), \text{ kde } P := I - \bar{A}'(\bar{A}\bar{A}')^{-1} \bar{A}$$

Minimalizácia na priamke

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

$$h := -P \nabla \bar{f}(e), \text{ kde } P := I - \bar{A}'(\bar{A}\bar{A}')^{-1} \bar{A}$$

Minimalizácia na priamke

$$\bar{\lambda} \in \arg \min \{ \bar{f}(e + \lambda h) \mid \lambda \geq 0, e + \lambda h \geq 0 \}$$

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

$$h := -P \nabla \bar{f}(e), \text{ kde } P := I - \bar{A}'(\bar{A}\bar{A}')^{-1}\bar{A}$$

Minimalizácia na priamke

$$\bar{\lambda} \in \arg \min \{ \bar{f}(e + \lambda h) \mid \lambda \geq 0, e + \lambda h \geq 0 \}$$

Nový bod

$$y^* := e + \delta \bar{\lambda} h$$

Kroky SSD algoritmu

Škálovanie tak aby $x^k \rightarrow e = (1, \dots, 1)$

$$X := \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k), \bar{A} := AX, \bar{f}(y) := f(Xy)$$

Určenie smeru zmeny

$$h := -P \nabla \bar{f}(e), \text{ kde } P := I - \bar{A}'(\bar{A}\bar{A}')^{-1}\bar{A}$$

Minimalizácia na priamke

$$\bar{\lambda} \in \arg \min \{ \bar{f}(e + \lambda h) | \lambda \geq 0, e + \lambda h \geq 0 \}$$

Nový bod

$$y^* := e + \delta \bar{\lambda} h$$

Návrat

$$x^{k+1} := Xy^*$$

SSD sa aplikuje na LP problém

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & \quad a'x = 1, a \geq 0 \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

SSD sa aplikuje na LP problém

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & \quad a'x = 1, a \geq 0 \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Predpokladá sa, že

- množina $S = \{x \in R_+^n \mid Ax = 0, a'x = 1\}$ je ohraničená,

SSD sa aplikuje na LP problém

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & a'x = 1, a \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Predpokladá sa, že

- množina $S = \{x \in R_+^n \mid Ax = 0, a'x = 1\}$ je ohraničená,
- bod $e = (1, \dots, 1)$ je prípustný,

SSD sa aplikuje na LP problém

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & a'x = 1, a \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Predpokladá sa, že

- množina $S = \{x \in R_+^n \mid Ax = 0, a'x = 1\}$ je ohraničená,
- bod $e = (1, \dots, 1)$ je prípustný,
- $c'x$ nie je konštantné na S ,

SSD sa aplikuje na LP problém

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{za podmienok } Ax = b \\ & a'x = 1, a \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Predpokladá sa, že

- množina $S = \{x \in R_+^n \mid Ax = 0, a'x = 1\}$ je ohraničená,
- bod $e = (1, \dots, 1)$ je prípustný,
- $c'x$ nie je konštantné na S ,
- cena optimálneho riešenia je 0.

Karmarkarov algoritmus

Aplikácia SSD s funkciou

$$f(x) = n \log(c'x) - \sum \log x_i = \log \frac{(c'x)^n}{\prod x_i}$$

Karmarka ukázal, že algoritmus má lineárnu konvergenciu.

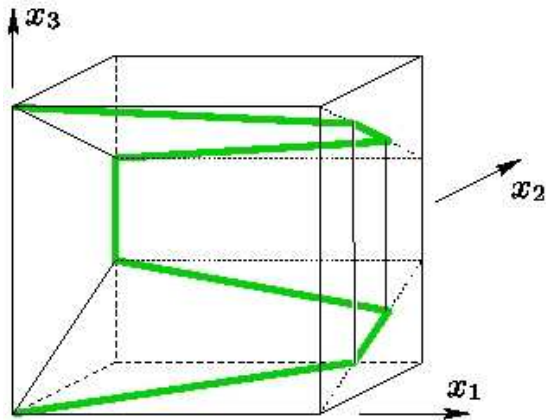
IPM vs. Simplex

V praxi nezaostáva za simplexom, avšak simplex lepší pre celočíselné programovanie.

IPM vs. Simplex

V praxi nezaostáva za simplexom, avšak simplex lepší pre celočíselné programovanie.

2004 Deza, Terlaky, Nematollahi, Peyghami centrálna cesta na Klee-Mintyho kocke môže “navštíviť” všetkých 2^n vrcholov

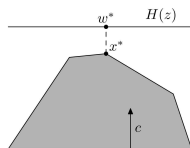


Outline

- 1 LP problémy a simplexová metóda
- 2 Karmarkova metóda
- 3 Metóda T. Juríka**
- 4 Kvadratické programovanie
- 5 Výskumné otázky

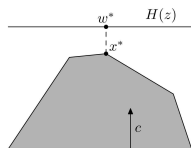
Motivácia

Reformulácia LP: bod x^* je optimum $\Leftrightarrow x^*$ najbližší bod polytópu k *nadrovine* H kolmej k cenovému vektoru.



Motivácia

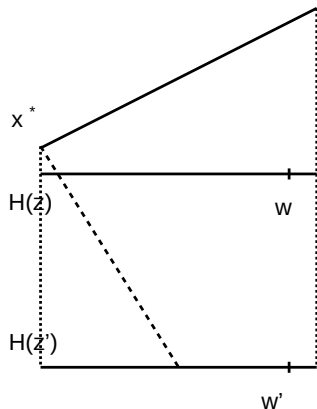
Reformulácia LP: bod x^* je optimum $\Leftrightarrow x^*$ najbližší bod polytópu k *nadrovine* H kolmej k cenovému vektoru.



Nápad: modifikujme LP ako hľadanie bodu x_S najbližšieho k *podmnožine* $S \subset H$.

Najjednoduchší prípad: S je bod

Pre daný bod $w \in H(z)$ je ťažké nájsť x , ktorý je k w najbližší.
Rovnako ťažké ako riešiť samotný LP problém.



Obrátenie problému

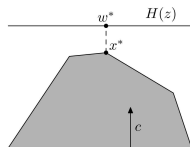
Pre daný bod x je ľahké nájsť body w_1, w_2 na $H(z)$, také že

- w_1 je najbližší k x (priemet x na $H(z)$)

Obrátenie problému

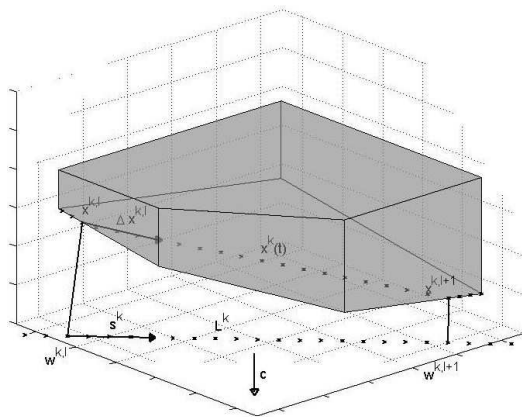
Pre daný bod x je ľahké nájsť body w_1, w_2 na $H(z)$, také že

- w_1 je najbližší k x (priemet x na $H(z)$)
- x je najbližší bod polytópu k w_2



Preved'me týmito dvoma bodmi priamku!

Druhý najjednoduchší prípad: S je priamka



Outline

- 1 LP problémy a simplexová metóda
- 2 Karmarkova metóda
- 3 Metóda T. Juríka
- 4 Kvadratické programovanie**
- 5 Výskumné otázky

Formulácia problému

Minimalizuj $f(x) = \frac{1}{2}x'Qx + cx$ za podmienok

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Formulácia problému

Minimalizuj $f(x) = \frac{1}{2}x'Qx + cx$ za podmienok

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Ak Q je kladne definitná, tak $f(x)$ je konvexná funkcia a existuje jediné lokálne minimum, ktoré je aj globálnym minimom.

KKT podmienky na minimum

Treba riešiť sústavu:

$$Qx + A'\mu' - y = -c'$$

$$Ax + v = b$$

$$x \geq 0, \mu \geq 0, y \geq 0, v \geq 0$$

$$y'x = 0, \mu v = 0$$

- modifikovaná simplexová metóda

Metódy riešenia QP

- modifikovaná simplexová metóda
- Frank–Wolfe algoritmus

Metódy riešenia QP

- modifikovaná simplexová metóda
- Frank–Wolfe algoritmus
- metódy vnútorného bodu
- gradientová metóda
- metóda projekcie gradientu
- elipsoidná metóda
- ...

Outline

- 1 LP problémy a simplexová metóda
- 2 Karmarkova metóda
- 3 Metóda T. Juríka
- 4 Kvadratické programovanie
- 5 Výskumné otázky

Príklad hladkej, konvexnej plochy

Príklad hladkej, konvexnej plochy

Domnienka

Ak je Hessian kladne definitný, metóda konverguje lineárne.

Príklad hladkej, konvexnej plochy

Domnienka

Ak je Hessian kladne definitný, metóda konverguje lineárne.

Domnienka

Presnosť po k krokoch je priamo úmerná vzdialenosti H od polytópu.

Príklad hladkej, konvexnej plochy

Domnienka

Ak je Hessian kladne definitný, metóda konverguje lineárne.

Domnienka

Presnosť po k krokoch je priamo úmerná vzdialenosti H od polytópu.

Otázka

Aký je efekt dilatácie na konvergenciu?

Reálne testy na NETLIB problémoch

93 štandardných LP problémov

Reálne testy na NETLIB problémoch

93 štandardných LP problémov Ako sa správa originálny algoritmus ako aj jeho rôzne varianty:

- náhodná priamka cez x
- náhodná priamka cez w
- len 1-krok vo vnútornom algoritme
- posúvanie nadroviny
- škálovanie
- viacdimenzionálne podmnožiny S
- ...

Degenerácia

Otázka

Aký efekt majú degenerované úlohy?

Analóg Hirshovej domnienky

Prianie

Pre danú priamku, počet iterácii metódy je ohraničený štvorcom počtu obmedzení.

Súvislosť s inými LP $\rightarrow$ QP metódami

Mangasarian, Golikov, Evtušenko, Kanzow, Navidi, Malek, Khosravi, ...

